Henning Fernau / Daniel Meister
Universität Trier

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik 1

Aufgabenblatt 7

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 22.06.2011, 12 Uhr
im Kasten für "GTI 1" vor Raum H426

Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben gestatten den Erwerb von Punkten, aber die dort erzielbare Maximalpunktzahl geht nicht in die Gesamt-Maximalpunktzahl für Studierende ein, welche nicht Informatik Kernfach studieren. (Bonuspunkte)

Aufgabe 1 (Abbildungen und Äquivalenzklassen) (3+2 Punkte)

Es sei $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die wie folgt definierte *Abrundefunktion*:

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\},$$

die also der Zahl x die größte ganze Zahl zuordnet, welche nicht größer als x ist.

1. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es in der von der Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \lfloor x/6 \rfloor$ induzierten Äquivalenzrelation, die Elemente enthalten, deren Betrag kleiner als 15 ist? Listen Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen vollständig auf.
2. Geben Sie eine Bijektion an, die die Äquivalenzklassen von f (aus dem vorigen Aufgabenteil) auf die von $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \lfloor x/6 \rfloor + 7$ abbildet.

Aufgabe 2 (Zerlegungen und Mächtigkeit ($*$)) (4 Punkte)

Geben Sie eine nicht-triviale Zerlegung von $\mathbb{N}$ an, sodass jede Menge in der Partition zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3 (Mächtigkeit) (6+3 Punkte)

Auf dem vierten Übungsblatt haben Sie den folgenden Begriff kennengelernt.
Die *Mächtigkeit* $|\cdot|$ einer endlichen Menge sei wie folgt festgelegt:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ |B| + 1, & \text{falls } A = B \cup \{x\} \text{ mit } x \notin B \end{cases}$$

$|\cdot|$ ordnet also jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl zu.

In der letzten Vorlesung haben wir eingeführt, dass eine endliche Menge, sagen wir A, n Elemente enthält, falls es eine Bijektion $f : [n] \to A$ gibt.

Beweisen Sie:

1. $(*)$ Für eine endliche Menge gilt: $|A| = n$ gdw. A enthält n Elemente.
2. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $[n]$ und $[n+1]$ sind nicht gleichmächtig.

Hinweis: Der Begriff der Endlichkeit einer Menge lässt sich wie folgt erklären: Eine Menge A heißt endlich, falls sie leer ist oder es eine natürliche Zahl n gibt sowie eine Bijektion von $[n]$ auf A.

Aufgabe 4 (Wörter und Zahlen) (2+4 Punkte)

In der Vorlesung wurde zu einem Alphabet X die Menge X^+ der (nicht-leeren) Wörter über X eingeführt. Dann wurde gezeigt, dass X^+ abzählbar ist.

1. Geben Sie für $X = \{a, b\}$ eine konkrete Bijektion $f : \mathbb{N} \to X^+$ an.
2. Bestimmen Sie noch konkreter damit $f(2)$, $f(13)$, $f^{-1}(ab)$ und $f^{-1}(babb)$.

Aufgabe 5 (Wörter, ganz am Anfang) (1+1+3 Punkte)

Es sei $X = \{a, b\}$. Betrachten Sie auf der Menge X^* die folgende Relation: $u \sqsubseteq v$ genau dann, wenn es ein Wort $x \in X^*$ gibt mit $v = ux$. (Hier ist die Konkatenation (wie üblich) durch Hintereinanderschreiben notiert.)

1. Geben Sie zwei unterschiedliche Wörter u, v der Länge höchstens drei an, für die gilt: $u \sqsubseteq v$.
2. Geben Sie zwei unterschiedliche Wörter u, v der Länge höchstens drei an, für die weder $u \sqsubseteq v$ noch $v \sqsubseteq u$ gilt.
3. Beweisen Sie: $\sqsubseteq$ ist eine Halbordnung.