Henning Fernau / Daniel Meister
Universität Trier

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik 1

Aufgabenblatt 8

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 29.06.2011, 12 Uhr
im Kasten für "GTI 1" vor Raum H426

Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben gestatten den Erwerb von Punkten, aber die dort erzielbare Maximalpunktzahl geht nicht in die Gesamt-Maximalpunktzahl für Studierende ein, welche nicht Informatik Kernfach studieren. (Bonuspunkte)

Aufgabe 1 (Äquivalenzklassen und Wortmengen) (3+2 Punkte)

Es sei $X = \{0, 1\}$ ein Alphabet. $\ell(w)$ bezeichne die Länge eines Wortes $w \in X^*$. Betrachte die Relation $R \subseteq X^* \times X^*$, die wie folgt definiert ist:

$$(u, v) \in R \iff 3|(\ell(u) - \ell(v)),$$

also, $\ell(u)$ und $\ell(v)$ lassen beim Teilen durch Drei denselben Rest.

1. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf X^* ist.
2. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\forall u \in X^* \forall v \in X^* \forall a \in X : ((u, v) \in R \implies (ua, va) \in R).$$

Aufgabe 2 (Endliche Automaten) (3+2 Punkte)

Wir betrachten die im Folgenden beschriebene Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$:
$w \in L$ gdw. $(\ell(w) > 4$ oder $(w$ enthält höchstens zwei $a))$.

1. Geben Sie einen endlichen Automaten A_1 an, der L akzeptiert.
2. Finden Sie einen DEA A_2, der eine Obermenge von L akzeptiert, aber weniger Zustände als A_1 besitzt.

Aufgabe 3 (Deterministische endliche Automaten) (2+1+7(*) Punkte)

Betrachten Sie nun den deterministischen endlichen Automaten $A = (Q, \{+, -\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\delta(q_i, +) = q_{(i+1) \bmod 3}$, $\delta(q_i, -) = q_{(i-1) \bmod 3}$.

1. Geben Sie den Automatengraphen für A an.

2. Welche Wörter aus $\{+, -\}^3$ akzeptiert der Automat?

3. Es zähle $\ell_+(w)$ die Anzahl von Vorkommen des Zeichens $+$ in w und entsprechend $\ell_-(w)$ die Anzahl von Vorkommen des Zeichens $-$ in w. Rekursiv kann man genauer festlegen:
   (a) $\ell_+(\lambda) = \ell_-(\lambda) = 0$.
   (b) $\ell_+(+v) = 1 + \ell_+(v)$; $\ell_+(-v) = \ell_+(v)$ sowie
   $\ell_-(-v) = 1 + \ell_-(v)$; $\ell_-(+v) = \ell_-(v)$ für $v \in \{+, -\}^*$.
   Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{N}$, sodass gilt:
   $w \in L(A) \iff ((a\ell_+(w) + b\ell_-(w) + c) \bmod 3) > 0$.
   Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (Nichtdeterministische endliche Automaten) (3+3+4(*) Punkte)

1. Geben Sie den Skelettautomaten für die endliche Sprache $L = \{a, aba, abb\}$ konkret mit einer Überführungstafel an.

2. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A an, der L akzeptiert.

3. Begründen Sie $L = L(A)$ für den von Ihnen im vorigen Aufgabenteil angegebenen Automaten A.