Henning Fernau / Daniel Meister
Universität Trier

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik 1

Aufgabenblatt 10

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 13.07.2011, 12 Uhr
im Kasten für "GTI 1" vor Raum H426

Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben gestatten den Erwerb von Punkten, aber die dort erzielbare Maximalpunktzahl geht nicht in die Gesamt-Maximalpunktzahl für Studierende ein, welche nicht Informatik Kernfach studieren (Bonuspunkte).

Aufgabe 1 (Rekursive / Induktive Definition) (2+1+2(*)+2 Punkte)

Die Abbildung $\psi : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ sei rekursiv wie folgt definiert:

- $\psi(\lambda) = \lambda$, $\psi(a) = b$, $\psi(b) = a$.
- $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$ für $u, v \in \{a, b\}^*$.

1. Berechnen Sie $\psi(aab)$ und $\psi(bbab)$ schrittweise.
2. Beschreiben Sie in Worten, was ψ "macht".
3. Der zweite Punkt der Definition von ψ lässt gewisse Freiheiten bei der Aufteilung längerer Wörter. Gemäß der Definition muss aber für beliebige Wörter $u, v, x, y \in \{a, b\}^*$ gelten:
$$\psi(u)\psi(v) = \psi(uv) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y),$$
sofern $uv = xy$ zutrifft, denn sonst wäre ja die Definition mehrdeutig. Ist das immer der Fall? Begründung!
4. Geben Sie eine Abbildung $h : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ an, für die es Wörter $u, v, x, y \in \{a, b\}^*$ mit $uv = xy$ gibt, sodass
$$h(u)h(v) = h(uv) = h(xy) = h(x)h(y)$$
<ins>nicht</ins> zutrifft.

Aufgabe 2 (Nichtregularität) (5+3 Punkte)

Die im Folgenden verwendete Funktion ψ entstamme der vorigen Aufgabe. Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{w\psi(w) \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nicht regulär ist

1. mithilfe des Pumping Lemmas bzw.
2. unter Ausnutzung von Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen und mithin durch Rückführung auf einer aus der Vorlesung bekanntermaßen nicht reguläre Sprache.

Aufgabe 3 (Äquivalenz von Myhill-Nerode 1) (5(*)+3 Punkte)

Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^k ba^k \mid k \geq 0\}$.

1. Beweisen Sie, dass die Relation $\equiv_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen besitzt.
2. Zeigen Sie, dass sich L als Vereinigung lediglich endlich vieler Äquivalenzklassen der Relation $\equiv_L$ ergibt.

Aufgabe 4 (Äquivalenz von Myhill-Nerode 2) (2+2 Punkte)

1. Beweisen Sie: Ist $L \subseteq \{a, b\}^*$ eine Sprache, zu der es zwei Wörter u, v gibt mit $u \in L$ und $v \notin L$, so ist $u \equiv_L v$ falsch.
2. Geben Sie die Automatengraphen sämtlicher DEAs A an für Sprachen L über dem Alphabet $\{a, b\}$, sodass die Relation $\equiv_L$ nur eine Äquivalenzklasse besitzt.

Aufgabe 5 (Rekursive / Induktive Definition 2) (3+4(*) Punkte)

Erinnerung (Aufgabenblatt 7): Es seien Σ ein Alphabet und $u, v \in \Sigma^*$. u heißt *Anfangswort* oder *Präfix* von v, in Zeichen $u \sqsubseteq v$, genau dann, wenn es ein Wort $x \in \Sigma^*$ gibt mit $v = ux$. Zu $L \subseteq \Sigma^*$ sei $P(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L(u \sqsubseteq v)\}$, d.h., $P(L)$ enthält gerade die Präfixe von Wörtern aus L.
Es sei RA(Σ) die Menge der regulären Ausdrücke über dem Alphabet Σ, wie auf Folie 12 in Vorlesung 9 eingeführt.

1. Definieren Sie rekursiv eine Abbildung π : RA(Σ) $\rightarrow$ RA(Σ), für die für jeden Ausdruck $E \in$ RA(Σ) gilt: $P(L(E)) = L(\pi(E))$.
2. Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Konstruktion, d.h., zeigen Sie, dass tatsächlich $P(L(E)) = L(\pi(E))$ für das von Ihnen im vorigen Aufgabenteil definierte π gilt.