

Eine Formel ist in Literal-NF, wenn nur Variablen negiert auftreten. Formal(er): Ist ϕ in Literal-NF und ist $\neg\psi$ eine Teilformel von ϕ , so folgt, dass ψ eine Variable ist.

Zu zeigen ist, dass jede aussagenlogische Formel durch „Anwendung“ der deMorgan-Gesetze in Literal-NF überführt werden kann. Diese Gesetze sind:

$$\begin{aligned}\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) &\equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2, \text{ und} \\ \neg(\phi_1 \vee \phi_2) &\equiv \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2.\end{aligned}$$

Ausserdem verwenden wir das Gesetz $\neg\neg\phi \equiv \phi$.

Der Beweis wird induktiv über die *Tiefe* einer Formel geführt. Die Tiefe von ϕ , notiert $d(\phi)$, ist rekursiv auf der Struktur von ϕ definiert. Es ist

$$d(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi = x \in \mathcal{V} \\ 1 + \max\{d(\phi_1), d(\phi_2)\} & \text{für } \phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \text{ oder } \phi = \phi_1 \vee \phi_2 \\ 1 + d(\psi) & \text{für } \phi = \neg\psi \end{cases}$$

Genauer wird gezeigt

Ist ϕ aussagenlogische Formel der Tiefe k , so kann ϕ durch Anwendung der deMorgan-Gesetze in Literal-NF überführt werden.

I_0 : Für $d(\phi) = 0$ gilt $\phi = x \in \mathcal{V}$, also ist ϕ in Literal-NF.

I_k : Die Eigenschaft gelte für Formeln der Tiefe $\leq k$.

I_{k+1} : Für ϕ mit $d(\phi) = k + 1$ wird Fallunterscheidung nach der Struktur von ϕ geführt.

- Für $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ gilt, dass ϕ_1 und ϕ_2 höchstens Tiefe k haben. Nach Induktionssannahme sind diese Formeln in Literal-NF – etwa ϕ'_1 und ϕ'_2 – überführbar. Dann ist $\phi'_1 \wedge \phi'_2$ Literal-NF für ϕ . Analog für $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$.
- Für $\phi = \neg\psi$ wird weiter nach der Struktur von ψ unterschieden. Für $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$, ergibt sich mit deMorgan

$$\phi = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \neg\psi_1 \vee \neg\psi_2.$$

Die Induktionsannahme trifft auf $\neg\psi_1$ und $\neg\psi_2$ zu und die Literal-NF von ϕ ergibt sich aus denen von $\neg\psi_1$ und $\neg\psi_2$. Analog für $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$. Für $\phi = \neg\psi$ finden wir

$$\phi \equiv \psi$$

und die Literal-NF von ϕ entspricht der von ψ .