1. Aufgabe: (*Punkte)*

Gegeben der Kellerautomat $A = (\{q\}, \{a, b\}, \{a, b\}, q, \Delta, \{q\})$ mit

$$\Delta = \{((q, a, \lambda), (q, a)),\ ((q, a, b), (q, \lambda)),\\ ((q, b, a), (q, \lambda)),\ ((q, b, \lambda), (q, b))\}.$$

Zu zeigen ist

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \subseteq L(A).$$

Wir zeigen, dass jedes $w \in \{a, b\}^*$ vollständig gelesen werden kann, wobei

$$d = \#_a(w) - \#_b(w)$$

im Keller „codiert" wird. Der Betrag von d wird unär codiert, das Vorzeichen von d durch as oder bs im Keller. Genauer zeigen wir die Eigenschaften

1. ist $d \geq 0$, so gilt $(q, w, \lambda) \vdash^* (q, \lambda, a^d)$
2. ist $d < 0$, so gilt $(q, w, \lambda) \vdash^* (q, \lambda, b^{-d})$

Beachten Sie, dass nur die Existenz derartiger Konfigurationsübergänge (unter möglichen anderen) zu zeigen ist. Wir induzieren nach $\ell(w)$:

I_0: $\ell(w) = 0$, also $w = \lambda$. Es ist $d \geq 0$ und $a^d = \lambda$. Mit $(q, w, \lambda) = (q, \lambda, \lambda) \vdash^0 (q, \lambda, \lambda)$ gelten Eigenschaften 1. & 2.

I_n: Die Eigenschaften 1. & 2. gelten für $\ell(w) = n$

I_{n+1}: Sei $\ell(w) = n + 1$, also $w = w'a$ oder $w = w'b$ mit $\ell(w') = n$. Ausgeführt ist der Fall $w = w'a$. Es wird unterschieden, ob für

$$d' = \#_a(w') - \#_b(w')$$

$d' \geq 0$ oder $d' < 0$ zutrifft. Klar ist das hier $d = d' + 1$ gilt.

- Für $d' \geq 0$ gilt auch $d \geq 0$ und weiter

$$(q, w, \lambda) = (q, w'a, \lambda) \overset{I_n}{\vdash^*} (q, a, a^{d'}) \vdash (q, \lambda, a^{d'+1}) = (q, \lambda, a^d).$$

- Für $d' < 0$ gilt

$$(q, w, \lambda) = (q, w'a, \lambda) \overset{I_n}{\vdash^*} (q, a, b^{-d'}) \vdash (q, \lambda, b^{-(d'+1)}) = (q, \lambda, b^{-d}).$$

  Wegen $d' < 0$ gilt $-d \geq 0$, also ist der Kellerinhalt wohldefiniert. Beachten Sie dass für $d = 0$, also insbesondere $d \geq 0$, Eigenschaft 1 mit $b^{-d} = b^0 = \lambda = a^d$ zutrifft. Ansonsten ist $d < 0$.

(Rechnen Sie den Fall $w = w'b$ mit $d = d' - 1$ analog nach)

Für $w \in \{a, b\}^*$ mit $d = \#_a(w) = \#_b(w) = 0$ gilt also (Eigsch. 1) $(q, w, \lambda) \vdash (q, \lambda, a^0) = (q, \lambda, \lambda)$, womit die ursprüngliche Behauptung gezeigt ist.