Grundlagen Theoretischer Informatik 3

SoSe 2012 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Grundlagen Theoretischer Informatik 3 Gesamtübersicht

- Organisatorisches; Einführung
- Algorithmenanalyse: Komplexität und Korrektheit
- Zur Behandlung NP-schwerer Probleme: Ausblicke
- (Randomisierte Algorithmen und ihre Analyse)

Organisatorisches

Vorlesungen FR 8.30-10.00 im F 59

Übungsbetrieb in Form von einer Übungsgruppe
BEGINN: in der zweiten Semesterwoche
FR 10-12, F 59

Dozentensprechstunde DO 13-14 in meinem Büro H 410 (4. Stock)

Mitarbeitersprechstunde (Daniel Meister) DO 13-14 H 413

Rekursive Algorithmen / Prozeduren

Prozeduren kann man bei ihrem Aufruf *Parameter* übergeben, und bei ihrer Beendigung können Prozeduren auch Werte an ihren Aufrufer zurückgeben.
Diese Eigenschaften laden geradezu dazu ein, dass Prozeduren in ihrem Inneren wiederum “sich selbst” aufrufen;
solche Prozeduraufrufe heißen auch *rekursiv*.
Prozeduren mit rekursiven Aufrufen heißen auch selbst schlicht *rekursiv*,
und ebenso Algorithmen, die mit rekursiven Prozeduren dargestellt werden.

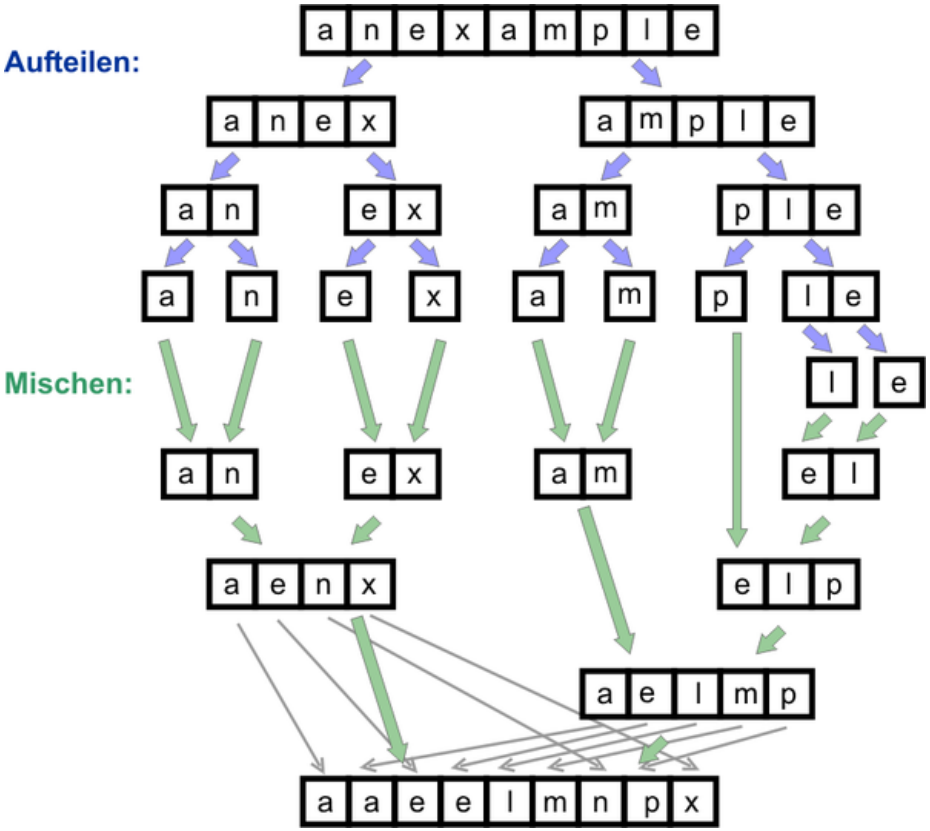
Meist ist es nicht allzu schwierig, rekursive Prozeduren in WHILE-Schleifen zu überführen, die Darstellung verliert aber oft an Eleganz.

Rekursion am Beispiel: Sortieren durch Mischen (Mergesort)

```
funktion mergesort(feld);
  falls (Größe von feld <= 1) dann antworte feld
  sonst
    halbiere bestmöglich feld in linkes, rechtes
    antworte merge(mergesort(linkes),mergesort(rechtes));
```

Ich wechsele teilweise bewusst ab und an Darstellungen von Algorithmen, so wie Sie es auch in der Literatur vorfinden; hier ähnlich zu Wikipedia.

Sortieren durch Mischen: Ein Beispiel



Laufzeitabschätzung

Es sei $T(n)$ eine obere Schranke für die Laufzeit von `mergesort` auf Feldern der Größe n.
Auf Feldern der Größe 1 braucht der Algorithmus offenbar konstante Zeit, d.h., $T(1) = c$.
Wenn wir annehmen, `merge` brauche Linearzeit ebenso wie das (implizite) Feldaufspalten (Halbieren), so gilt für $n > 1$:

$$T(n) \leq a \cdot n + T(h_1(n)) + T(h_2(n))$$

für eine geeignete Konstante $a \geq 1$. Hierbei seien $h_1(n)$ und $h_2(n)$ die Größen der beiden "Hälften", also gilt stets $h_1(n) + h_2(n) = n$, und $h_i(n) = n/2$, falls n gerade ist; sonst muss geeignet auf- bzw. abgerundet werden.

Sind wir nur am größenordnungsmäßigen Wachstum von T interessiert, können wir $c = a = 1$ setzen.

Außerdem können wir $h_1(n) = h_2(n) = \lceil n/2 \rceil$ setzen (stets aufrunden). (Warum ?)

Wie löst man aber eine *Rekursionsgleichung* der Form $T(n) \leq n + 2T(\lceil n/2 \rceil)$?

Analyse von Rekursionen

Bei der Ressourcen-Analyse von rekursiven Algorithmen enstehen oft Rekursionsgleichungen, die gelöst werden müssen.

In einer Rekursionsgleichung für eine Funktion f wird zur Berechnung der Funktion für den Wert n die Funktion für andere, kleinere Werte verwendet.

Allgemeine Form einer Rekursionsgleichung: $f(n) = G(f(1); f(2); \ldots; f(n-1))$.

Eine Rekursionsgleichung definiert eine Funktionenschar (alle Funktionen die die Gleichung erfüllen).

Aus der Funktionenschar wird Funktion durch Festlegen weiterer Parameter, meist durch Lösen der *Anfangswertbedingungen*

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\ldots$, $f(k) = a_k$.

Beispiel: Betrachte die Rekursionsgleichung $T(n) = 2T(n-1)$ und $T(0) = 1$.

Offenbar gilt: $T(n) = 2^n$ (*explizite Darstellung*).

Lösen von Rekursionsgleichungen

Ziel: Überführen in eine geschlossene, nichtrekursive Form

Induktive Einsetzungsmethode: Anhand der Rekursionsgleichung wird eine Lösung geraten und durch Induktion bestätigt. Oft enthält die vermutete Lösung noch zu spezifizierende Parameter, diese ergeben sich oft durch einen Koeffizientenvergleich, der für den Induktionsbeweis notwendig wird. (konstruktive Induktion).

Bei der *Iterationsmethode* wird die Funktion auf der rechten Seite immer wieder durch die Rekursionsgleichung ersetzt. Dann wird versucht die rechte Seite in eine geschlossenen Form zu bringen.

Fibonacci liefert die Rekursionsgleichung $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ und die Anfangsbedingungen $f(1) = f(2) = 1$.
Offensichtlich ist $f(n)$ größer als $2f(n-2)$, d.h., $f(n)$ wächst asymptotisch mindestens mit $2^{n/2} = \sqrt{2}^n$.
Wir vermuten daher exponentielles Wachstum.
Annahme: $f(n) = ac^n$ für gewisse $a; c > 0$.
Induktionsschritt. Einsetzen in die Rekursionsgleichung ergibt

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) = ac^{n-1} + ac^{n-2} = ac^n \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = ac^n \frac{c+1}{c^2}$$

Damit der Induktionsschritt korrekt ist, muss $ac^n \frac{c+1}{c^2} = ac^n$ sein, d.h., $c^2 - c - 1 = 0$. Das liefert $c = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (goldener Schnitt).
Induktionsanfang 1. Da $c \leq 2$ gilt $f(1) \geq ac^1$ und $f(2) \geq ac^2$ für $a = 1/4$.
$\rightsquigarrow f(n) \geq \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$.
Induktionsanfang 2. Da $c \geq 1$ gilt $f(1) \leq ac^1$ und $f(2) \leq ac^2$ für $a = 1$.
$\rightsquigarrow f(n) \leq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$.
Also: $f(n) \in \Theta\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right)$.

Rekursive Algorithmen — *Divide and Conquer*: Teile und herrsche

Viele Algorithmen zerlegen das zu lösende Problem einer Größe in 2 oder mehrere Teilprobleme mit einer geringeren Größe.
Die Teilprobleme werden (rekursiv) berechnet und die Lösung aus den Ergebnissen zusammengesetzt. Die Laufzeit für eine Eingabe der Länge n setzt sich also zusammen aus der Laufzeit für die kleineren Eingaben plus der Laufzeit die benötigt, wird die Eingabe zu zerlegen und die Lösung zusammenzufügen.

```
Procedure: DivideAndConquer(x:Eingabe)
IF |x| = 1 THEN
   berechne Lösung l für x direkt.
ELSE zerlege x in zwei (gleichgroße) Teile x1 und x2
   l1 = DivideAndConquer(x1)
   l2 = DivideAndConquer(x2)
   berechne Lösung l für x aus l1 und l2.
RETURN l
```

Beispiel: Mergesort

Rekursive Algorithmen — Divide and Conquer Analyse

Der Aufwand für das Zerlegen und Zusammenfügen sei $cn + d$.
Die Komplexität ergibt sich damit zu: $T(n) \leq 2T(n/2) + cn + d$:

Wir versuchen eine Lösung zu der Rekursionsgleichung zu finden und diese zu verifizieren.
Bei jedem Aufruf halbiert sich die Problemgröße, nach $\log_2(n)$ vielen Schritten wird die Größe 1 und damit das Ende der Rekursion erreicht. Da sich die Anzahl der Teilprobleme jedesmal verdoppelt, summiert sich die Anzahl der Schritte (vermutlich) jeweils wieder zu $cn + d$.
Wir vermuten daher eine Lösung der Form $T(n) = \alpha + \beta n + \delta n \log_2 n$.

Die vermutete Lösung $\alpha + \beta n + \delta n \log_2 n$ setzen wir induktiv ein:

$$\begin{aligned} T(n) &= cn + d + 2T(n/2) \\ &= cn + d + 2(\alpha + \beta(n/2) + \delta(n/2)\log_2(n/2)) \\ &= cn + d + 2\alpha + \beta n + \delta n \log_2(n) - \delta n \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $\alpha = -d$ und $\delta = c$. Dies ergibt Funktionen der Form

$$\{-d + \beta n + cn \log_2(n) \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Der Wert von β ergibt sich aus der Anfangswertbedingung.
Für $T(1) = 13$ z.B. ergibt sich aus $-d + \beta + c \log_2 1 = 13$, dass $\beta = d + 13$.

Beispiel: Iterationsmethode für $f(n) = n + 3f(n/4)$.
Iteriertes Einsetzen und Ersetzen der Summe ergibt:

$$\begin{aligned} f(n) &= n + 3f(n/4) = n + 3(n/4 + 3f(n/16)) \\ &= n + 3n/4 + 9(n/16 + 3f(n/64)) \leq n + 3n/4 + 9n/16 + \dots \\ &\leq n \cdot \sum_{i \geq 0} (3/4)^i = n \cdot \frac{1}{1 - 3/4} = 4n = \mathcal{O}(n) \end{aligned}$$

Die Anfangswertbedingung $f(1) = a$ wirkt sich nur auf die in der $\mathcal{O}$-Notation verborgenen Konstanten aus.
Wir können sogar $f(n) \in \Theta(n)$ folgern! (Warum?)

Hauptsatz der Laufzeitfunktionen (engl.: master theorem of recursion)

Betrachte folgende Laufzeitfunktion:

$$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n), \quad \text{mit} \quad T(1) = \Theta(1)$$

Hierbei sind $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten.
$f(n)$ bezeichnet eine von $T(n)$ unabhängige und nicht negative Funktion.
Interpretation der Rekurrenz $T(n)$:
a: Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion
n/b: (obere Schranke für) Größe der erzeugten Teilprobleme
$f(n)$: Kosten (Aufwand), die durch die Aufspaltung des Problems und der Kombination der Teillösungen entstehen

Hauptsatz der Laufzeitfunktionen (engl.: master theorem of recursion)

	Erster Fall	Zweiter Fall	Dritter Fall
Allgemein Falls gilt:	$f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b a-\epsilon}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$	$f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$	$f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\epsilon}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$, und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und hinreichend große n gilt: $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$
Dann folgt:	$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$	$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log(n)\right)$	$T(n) \in \Theta(f(n))$
Beispiel	$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 1000n^2$	$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 10n$	$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$
Aus der Formel ist folgendes abzulesen:	$a = 8,\ b = 2$ $f(n) = 1000n^2$ $\log_b a = \log_2 8 = 3$	$a = 2,\ b = 2$ $f(n) = 10n$ $\log_b a = \log_2 2 = 1$	$a = 2,\ b = 2$ $f(n) = n^2$ $\log_b a = \log_2 2 = 1$
1. Bedingung:	$f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b a-\epsilon}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$	$f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$	$f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\epsilon}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$
Werte einsetzen:	$1000n^2 \in \mathrm{O}\left(n^{3-\epsilon}\right)$	$10n \in \Theta\left(n^1\right)$	$n^2 \in \Omega\left(n^{1+\epsilon}\right)$
Wähle $\varepsilon > 0$:	$1000n^2 \in \mathrm{O}\left(n^2\right)$ mit $\varepsilon = 1$ √	$10n \in \Theta(n)$ √	$n^2 \in \Omega\left(n^2\right)$ mit $\varepsilon = 1$ √
2. Bedingung: (nur im 3. Fall)			$af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ Setze auch hier obige Werte ein: $2(\frac{n}{2})^2 \leq cn^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 \leq cn^2$ Wähle c = ½: $\forall n \geq 1 : \frac{1}{2}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2$ √
Ist die Bedingung erfüllt, so gilt:	$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$	$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log(n)\right)$	$T(n) \in \Theta(f(n))$
Damit gilt für die Laufzeitfunktion:	$T(n) \in \Theta(n^3)$	$T(n) \in \Theta(n \log(n))$	$T(n) \in \Theta(n^2)$

Hauptsatz der Laufzeitfunktionen (engl.: master theorem of recursion)

. . . meistert nicht alles:

Betrachte $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2(n)$, also $f(n) = n \log_2(n)$, sowie $a = b = 2$.

Fall 1: Gilt $f(n) = \mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$? Nein.

Fall 2: Gilt $f(n) = \Theta(n)$? Nein.

Fall 3: Gilt $f(n) = \Omega(n^{1+\epsilon})$? Nein.

Das “Master Theorem” ist also nicht anwendbar.

Hauptsatz der Laufzeitfunktionen (allgemeinere Form)

Sei $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die zu untersuchende Abbildung der Form

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T\left(\alpha_i n\right) + f(n),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$: $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$: $m \geq 1$ und $f(n) \in \Theta(n^k)$ mit $k \in \mathbb{N}$: $k \geq 0$.

T wird hierfür implizit durch $T(x) := T(\lfloor x \rfloor)$ oder $T(\lceil x \rceil)$ für $x \in \mathbb{R}^+$ fortgesetzt.

$$\rightsquigarrow T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{falls } \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^k) < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{falls } \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^k) = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^c) = 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^k) > 1 \end{cases}$$

Iterationsmethode für den **Hauptsatz der Laufzeitfunktionen**:

Lemma: $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) + \overbrace{\sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} [a^j \cdot f(n/b^j)]}^{g(n)}$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} T(n) &= f(n) + T(n/b) \\ &= a^0(f(n/b^0)) + a^1(f(n/b^1) + a^1(T(n/b^2))) \\ &= a^0(f(n/b^0)) + a^1(f(n/b^1)) + a^2(T(n/b^2)) \\ \ldots &= a^0(f(n/b^0)) + a^1(f(n/b^1)) + a^2(f(n/b^2)) + \cdots + a^{\log_b(n)-1}(T(n/b^{\log_b(n)-1})) + a^{\log_b(n)} \cdot T(1) \end{aligned}$$

Strenggenommen gilt dies nur, falls n eine Potenz von b ist...

Zum Beweis des Hauptsatzes müsste man noch $g(n)$ diskutieren.
Wir erörtern nur einen Fall.
Die anderen beiden Fälle sind ähnlich (nur etwas schwieriger).
Gilt $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, so folgt:

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} [a^j \cdot f(n/b^j)] \\
&= \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} [a^j \cdot \Theta((n/b^j)^{\log_b(a)})] \\
&= \Theta(\sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} [a^j \cdot (n/b^j)^{\log_b(a)}]) \\
&= \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} (a/b^{\log_b(a)})^j) \\
&= \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} 1) \\
&= \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n))
\end{aligned}
$$

Analytische Methodik—Erzeugende Funktionen / z-Transformation

Einen völlig anderen Zugang zur Lösung von Rekursionen gestattet die komplexe Analysis:

Interpretiere Folgen als Koeffizienten einer Potenzreihe.

Der Rekursionsgleichung (unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen) entspricht dann eine Funktionalgleichung für die *erzeugende Funktion*.
Dabei Konvention: $T(n) = 0$ für $n < 0$.
Nützliche Schreibweise: $[P(n)]$ für Prädikat P auf $\mathbb{Z}$ mit

$$[P(n)] = \begin{cases} 1 & P(n) \\ 0 & \neg P(n) \end{cases}$$

Beispiel: Rekursionsgleichung $T(n) = 2T(n-1)$ mit Anfangsbedingung $T(0) = 1$

$\rightsquigarrow T(n) = 2T(n-1) + [n = 0]$ (eine Gleichung !)

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} T(n)z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2T(n-1) + [n = 0])z^n \\ &= 2z \sum_{n\in\mathbb{Z}} T(n-1)z^{n-1} + 1 = 2z \sum_{n\in\mathbb{Z}} T(n)z^n + 1 \\ &= 2zG(z) + 1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow G(z) = \frac{1}{1-2z}$

$\rightsquigarrow$ Potenzreihenentwicklung $G(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (2z)^n$, denn $\frac{1}{1-y} = \sum_{n\in\mathbb{N}} y^n$

$\rightsquigarrow T(n) = 2^n$

Achtung: Anfangsbedingungen

Betrachte:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ 5 & n = 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) & n \geq 3 \end{cases}$$

Ausdrücken in einer Rekursionsgleichung:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) + c_2[n = 2] + c_1[n = 1] + c_0[n = 0]$$

Wegen $T(n) = 0$ für $n < 0$ gilt hier: $T(0) = T(0-1) + T(0-2) + T(0-3) + c_0 = 1$ mit $c_0 = 1$.
Weiterhin: $T(1) = T(1-1) + T(1-2) + T(1-3) + c_1 = 1 + c_1 = 3$ mit $c_1 = 2$.
Schließlich: $T(2) = T(2-1) + T(2-2) + T(2-3) + c_2 = 1 + 3 + c_2 = 5$ mit $c_2 = 1$.

Ein hilfreiches Lemma

Ist $q(z) = 1 + q_1 z + \cdots + q_d z^d$, $q_d \neq 0$ so bezeichnet $q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + \cdots + q_d$ das *reflektierte Polynom*.

Lemma: Sind $a_1, \ldots, a_d$ die Nullstellen des reflektierten Polynoms, so gilt:

$$q(z) = \prod_{j=1}^{d} (1 - a_j z).$$

Beweis: $q(z) = z^d \prod_{j=1}^{d} (1/z - a_j)$ gilt, denn $q^R(y) = y^d q(1/y)$.

Fibonacci—nochmals

geschlossene Rekursion: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n = 1]$.

Daraus Funktionalgleichung:

$$F(z) = \sum F_n z^n = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z.$$

$$\rightsquigarrow F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Partialbruchzerlegung mit dem hilfreichen Lemma und dem Ansatz:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}$$

Nullstellen von $q^R(z) = z^2 - z - 1$: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ und $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi =: \hat{\phi}$.
Unser Ansatz liefert:

$$\frac{1}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi}z)} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi}z} = \frac{(a+b) - (a\hat{\phi} + b\phi)z}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi}z)}$$

und damit das lineare Gleichungssystem mit den Bedingungen
$a + b = 1$ und $\hat{\phi}a + \phi b = 0$, also $a = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ und $b = -\frac{\hat{\phi}}{\sqrt{5}}$.
So erhalten wir die folgende schon bekannte Beziehung als explizite Darstellung der F_n:

$$F_n = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\phi^{n-1} - \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{n-1}.$$

Da $|\hat{\phi}| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, ist F_n die zu $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ nächstgelegene ganze Zahl ist.
Daraus folgt unmittelbar: $F_n = \Theta(\phi^n)$.

z-Transformation: zusammengefasst

Ausgangspunkt: induktiv definierte Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
Ziel: explizite Darstellung (geschlossene Form) von f

(a) Stelle eine einzige Rekursionsgleichung für f auf, erweitert auf $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, wobei $f(n) = 0$ für $n < 0$. (Hierin sind auch die Anfangsbedingungen erfasst.)
(b) Definiere erzeugende Funktion $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n$.
(c) Interpretiere Rekursionsgleichung als Funktionalgleichung und löse diese.
(d) Aus Funktionalgleichung gewinne Potenzreihenentwicklung von F.
(Wichtige Hilfsmittel: Partialbruchzerlegung und bekannte Reihenentwicklungen)
(e) Bestimme geschlossene Form von f durch Koeffizientenvergleich.