Grundlagen Theoretischer Informatik 3

SoSe 2012 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Realistischere While-Programme: Syntax

Das Grundalphabet A besteht aus:
Schlüsselwörtern: $S = \{\textbf{skip}, \leftarrow, ;, \textbf{if}, \textbf{then}, \textbf{else}, \textbf{fi}, \textbf{while}, \textbf{do}, \textbf{od}\}$
Booleschen Variablen: $V_{\mathbb{B}}$
Booleschen Operatoren: $O_{\mathbb{B}} = \{\neg, \wedge, \vee, \textbf{true}, \textbf{false}, \ldots\}$
Zahlvariablen: $V_{\mathbb{N}}$
Zahlenoperatoren: $O_{\mathbb{N}} = \{0, 1, +, -, *, /, \ldots\}$
Zahlenprädikaten: $P_{\mathbb{N}} = \{=, <, >, \leq, \geq, \ldots\}$
Klammern: $K = \{(,)\}$.

Mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik könnte man die Sprachen
WBA $\subseteq (V_{\mathbb{B}} \cup O_{\mathbb{B}} \cup K)^*$ der *wohlgeformten Booleschen Ausdrücke* und
WAA $\subseteq (V_{\mathbb{N}} \cup O_{\mathbb{N}} \cup K)^*$ der *wohlgeformten arithmetischen Ausdrücke* definieren.

Syntax von WHILE-Programmen definiert formale Sprache $L_{while} \subseteq A^*$:

(1) *Leere Anweisung*: **skip** $\in L_{while}$.
(2) *Wertzuweisung*: Gilt $v \in V_{\mathbb{B}}$ und ist e ein WBT, so gilt: $v \leftarrow e \in L_{while}$.
Ist $x \in V_{\mathbb{N}}$ und ist w ein WAA, so gilt: $x \leftarrow w \in L_{while}$.
(3) *Anweisungsfolge*: Mit S_1 und S_2 aus L_{while} folgt auch $S_1; S_2 \in L_{while}$.
(4) *Verzweigung*: Mit WBT e und S_1 und S_2 aus L_{while} folgt auch
if e **then** S_1 **else** S_2 **fi** $\in L_{while}$.
(5) *Schleife*: Mit WBT e und $S \in L_{while}$ folgt auch **while** e **do** S **od** $\in L_{while}$.
Nur Wörter über A, die wie in (1) bis (5) beschrieben konstruiert werden können, gehören zu L_{while}.

Ist $p \in L_{while}$ ein WHILE-Programm mit vorkommenden Booleschen Variablen $V_{\mathbb{B},p}$ und vorkommenden Zahlvariablen $V_{\mathbb{N},p}$, so lässt sich der Berechnungsstand in einer *Konfiguration* $(S, \sigma_{\mathbb{B}}, \sigma_{\mathbb{N}})$ festhalten, mit $S \in L_{while} \cup \{\lambda\}$, $\sigma_{\mathbb{B}} \in (\mathbb{B} \cup \{\uparrow\})^{|V_{\mathbb{B},p}|}$, $\sigma_{\mathbb{N}} \in (\mathbb{N} \cup \{\uparrow\})^{|V_{\mathbb{N},p}|}$, $\uparrow$ meint undef.

Konfigurationsübergänge definieren die Semantik von WHILE-Programmen

Hinweis: Dies ist ein einfacher Spezialfall für die Definition einer *operationellen Semantik*.
Mehr zu diesem Thema bieten Spezialvorlesungen.

Es seien $(S, \sigma_{\mathbb{B}}, \sigma_{\mathbb{N}})$ und $(T, \tau_{\mathbb{B}}, \tau_{\mathbb{N}})$ zwei Konfigurationen.
$(S, \sigma_{\mathbb{B}}, \sigma_{\mathbb{N}}) \Rightarrow (T, \tau_{\mathbb{B}}, \tau_{\mathbb{N}})$ gelte, wenn eine der nachstehenden Bedingungen erfüllt ist.

Ziel: Daraus kann man sofort die Semantik f_S eines WHILE-Programms S definieren als Ausgabewert $\rho = (\rho_{\mathbb{B}}, \rho_{\mathbb{N}})$ bei Eingabe von $\eta = (\eta_{\mathbb{B}}, \eta_{\mathbb{N}})$, falls nämlich $(S, \eta) \Rightarrow^* (\lambda, \rho)$ gilt. Hinweis: Ähnlichkeit mit Automaten und Grammatiken!

(1) ($S =$ **skip**; T oder ($S =$ **skip** und $T = \lambda$)) und $\tau = \sigma$

...

Beispiel einer Konfigurationsfolge

Betrachte das folgende Programm:

$a \leftarrow 0;$

$b \leftarrow x;$

while $b \geq y$ **do**

$\quad b \leftarrow b - y;$

$\quad a \leftarrow a + 1$

od

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} =: S_1$

$a, b, x, y \in V_{\mathbb{N}}$.

Betrachte $\sigma(x) = 14, \sigma(y) = 5$.

$$
\begin{aligned}
& (S, \sigma) = (a \leftarrow 0; b \leftarrow x; S_1, \sigma = (\uparrow, \uparrow, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (b \leftarrow x; S_1, (0, \uparrow, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (S_1, (0, 14, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (b \leftarrow b - y; a \leftarrow a + 1; S_1, (0, 14, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (a \leftarrow a + 1; S_1, (0, 9, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (S_1, (1, 9, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (b \leftarrow b - y; a \leftarrow a + 1; S_1, (1, 9, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (a \leftarrow a + 1; S_1, (1, 4, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (S_1, (2, 4, 14, 5)) \\
\Rightarrow\ & (\lambda, (2, 4, 14, 5))
\end{aligned}
$$

Was aber liefert das Programm als Ausgabe ((a, b)-Werte) für bel. (x, y)-Eingaben??

Funktionale Interpretation von WHILE-Programmen

Mit der Schreibweise $M\langle S\rangle$ anstelle von f_S für WHILE-Programme S können wir formulieren:

Satz: Für alle Variablenbelegungen σ gilt:

(1) $M\langle \textbf{skip}\rangle(\sigma) = \sigma$.

(2) $M\langle x \leftarrow t\rangle(\sigma) = \sigma[x/f_t(\sigma)]$ für alle WBT oder WAA t.

(3) $M\langle S;T\rangle(\sigma) = M\langle T\rangle(M\langle S\rangle(\sigma))$.

(4) $M\langle \textbf{if } e \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \textbf{ fi}\rangle(\sigma) = \begin{cases} M\langle S_1\rangle(\sigma) & \text{falls } f_e(\sigma) = 1 \\ M\langle S_2\rangle(\sigma) & \text{falls } f_e(\sigma) = 0 \end{cases}$

(5) $M\langle \textbf{while } e \textbf{ do } S \textbf{ od}\rangle(\sigma) = \begin{cases} M\langle \textbf{while } e \textbf{ do } S \textbf{ od}\rangle(M\langle S\rangle(\sigma)) & \text{falls } f_e(\sigma) = 1 \\ \sigma & \text{falls } f_e(\sigma) = 0 \end{cases}$

Die Hoaresche Logik

Ein *Hoarescher Ausdruck* ist eine Zeichenkette der Form

$$\{p\}\, S\, \{q\}$$

Dabei ist p ein WBT (die *Vorbedingung* von S), $S \in L_{\text{while}}$ und q ein WBT (die *Nachbedingung* von S). Das Paar (p, q) heißt auch *Spezifikation*.

Bedeutung: Für alle Variablenbelegungen σ soll gelten:
Ist $f_p(\sigma) = 1$ oder terminiert S auf σ nicht, so gilt auch $f_q(M\langle S\rangle(\sigma)) = 1$.
Wir schreiben dann auch: $M\langle\{p\}S\{q\}\rangle(\sigma) = 1$.

Die Hoaresche Logik Ein letztes Beispiel

Betrachte das folgende Programm:

$a \leftarrow 0;$

$b \leftarrow x;$

while $b \geq y$ **do**

$\quad b \leftarrow b - y;$

$\quad a \leftarrow a + 1$

od

$\Big\} =: S_1$

$a, b, x, y \in V_{\mathbb{N}}$.

Wir wissen bereits:

$\{\textbf{true}\}\ a \leftarrow 0; b \leftarrow x\ \{a = 0 \wedge b = x\}$.

Gilt $\sigma(x) < \sigma(y)$, so auch:

$$(M\,\langle a \leftarrow 0; b \leftarrow x\rangle\,(\sigma))(b)$$
$$< \sigma(y) = (M\,\langle a \leftarrow 0; b \leftarrow x\rangle\,(\sigma))(y),$$

also wird der Schleifenrumpf nie betreten, und die "Ausgabe" liefert für das Variablenpaar (a, b): $(0, \sigma(x))$.

Wie oben sieht man durch Induktion über die Anzahl i von Schleifenrumpfdurchläufen für eine Belegung σ_i am Ende des i-ten Durchlaufs:

1. $\sigma_i(a) = i$ und
2. $\sigma_i(b) = \sigma(x) - i * \sigma(y)$.

Also gilt das auch bei Schleifenabbruch, wobei dann zusätzlich $\sigma_i(b) < \sigma_i(y) = \sigma(y)$ gilt. Das gewährt, das schließlich das Variablenpaar (a, b) den Wert

$$(\sigma(x)\ \mathrm{DIV}\ \sigma(y), \sigma(x)\ \mathrm{mod}\ \sigma(y))$$

enthält.

Der Hoaresche Kalkül

Noch etwas Notation:
Sind p, t WBTs und $x \in V_{\mathbb{B},p}$, so bezeichne p_x^t denjenigen WBT, der aus p dadurch entsteht, dass jedes Vorkommen von x in p durch (t) ersetzt wird.
Entsprechend: p_x^t für WBT oder WAA p, $x \in V_{\mathbb{N},p}$ und WAA t.
Beispiel 1: Für den WBT $p = (x \leq x * y)$ gilt: $p_x^{1+1} = ((1+1) \leq (1+1) * y)$.

Axiomenschemata

(S) $\{p\}$ **skip** $\{p\}$ für alle WBT p.
(Z) *Zuweisungsschema* $\{p_x^t\}\ x \leftarrow t\ \{p\}$ für alle WBT p und (alle $x \in V_{\mathbb{B},p}$ und alle WBT t) sowie (alle $x \in V_{\mathbb{N},p}$ und alle WAA t)

Beispiel 2: $\{(1+1) \leq (1+1) * y\}\ x \leftarrow (1+1)\ \{(x \leq x * y)\}$ aus Bsp. 1.

Der Hoaresche Kalkül: Ableitungsregel (F)

Die *Folgerungsregel* (F):

$$\frac{p \rightsquigarrow q, \{q\}\ S\ \{r\}, r \rightsquigarrow s}{\{p\}\ S\ \{s\}}$$

Um nicht unnötigen weiteren notationellen Ballast anzuhäufen, dürfen wir beim Nachweis der "Implikation" $\rightsquigarrow$ auch die üblichen Rechengesetze für natürliche Zahlen und Boolesche Ausdrücke verwenden.
Streng formal müsste das alles in dem Kalkül (als mechanischer "Rechenvorschrift") aufgelistet sein...

Beispiel 2: $\{1 \leq y\}\ x \leftarrow (1+1)\ \{(x \leq x * y)\}$ aus Bsp. 2. mit (F), denn es gilt $(1 \leq y) \rightsquigarrow (2 \leq 2 * y) \rightsquigarrow ((1+1) \leq (1+1) * y)$.

Der Hoaresche Kalkül: Von hinten nach vorne

Eine mögliche “Instantiierung” vom Zuweisungsschema (Z) ist:
$\{(x+1) > 4\}\, x \leftarrow x+1\, \{x > 4\}$.
Die Zahlvariable x, die in $x > 4$ vorkommt, wird durch den WAA $(x+1)$ ersetzt.
In unserer Schreibweise: $(x > 4)^{x+1}_{x} = (x+1) > 4$.
Wegen $(x > 3) \rightsquigarrow ((x+1) > 4)$ folgt mit (F) aus (Z):
$\{x > 3\}\, x \leftarrow x+1\, \{x > 4\}$.

Beachte: Die Vorbedingung ergibt sich (mechanisch) aus der Nachbedingung, also “von hinten nach vorne”.
Dies entspricht der üblichen “Konstruktionsrichtung” dieses Kalküls.
Das ist aber sehr praktisch: Die Nachbedingung gibt ja (meist) an, “was das Programm tun soll”.
Nun “rechnet man aus”, ob es dies (auch stets) macht.

Der Hoaresche Kalkül: Ableitungsregel (L)

Die *Linearregel* (L):

$$\frac{\{p\}\ S_1\ \{q\}\ ,\ \{q\}\ S_2\ \{r\}}{\{p\}\ S_1; S_2\ \{r\}}$$

Für welches p gilt: $\{p\}\ a \leftarrow 0; b \leftarrow x\ \{a * y + b = x\}$?
Aus (Z): $\{a * y + x = x\}\ b \leftarrow x\ \{a * y + b = x\}$.
Für jede Zahl x (und alle a, y) gilt: $a * y = 0 \rightsquigarrow a * y + x = x$.
Aus (F): $\{a * y = 0\}\ b \leftarrow x\ \{a * y + b = x\}$.
Für welches p gilt: $\{p\}\ a \leftarrow 0\ \{a * y = 0\}$?
Mit (L) und (Z) ist $p = (0 * y = 0)$ eine mögliche Antwort.
Da dies eine offensichtliche zahlentheoretische Wahrheit ist, ist mit (F) auch $p =$ **true** möglich. Also gilt die Nachbedingung $\{a * y + b = x\}$ immer!

Der Hoaresche Kalkül: Ableitungsregel (I)

Die *Bedingungsregel* (I):

$$\frac{\{p \wedge e\}\ S_1\ \{q\}, \{p \wedge \neg e\}\ S_2\ \{q\}}{\{p\}\ \textbf{if}\ e\ \textbf{then}\ S_1\ \textbf{else}\ S_2\ \textbf{fi}\ \{q\}}$$

Ein Trivialbeispiel bietet die Minimumberechnung.

Mit der Kenntnis der Beziehung

$$ggt(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ ggt(a-b,b), & a > b \\ ggt(a,b-a), & a < b \end{cases}$$

lässt sich zeigen:

$\{a \neq b \wedge A = ggt(a,b)\}$
if $a > b$ **then** $a \leftarrow a - b$ **else** $b \leftarrow b - a$ **fi**
$\{A = ggt(a,b)\}$.
Insbesondere gilt mit (Z) und (F):
$\{a \neq b \wedge A = ggt(a,b) \wedge \neg(a > b)\}$
$\rightsquigarrow \{a < b \wedge A = ggt(a,b)\}$
$b \leftarrow b - a$
$\{A = ggt(a,b)\}$.

Der Hoaresche Kalkül: Ableitungsregel (W)

Die *Schleifenregel* (W):

$$\frac{\{p \wedge e\}\ S\ \{p\}}{\{p\}\ \textbf{while}\ e\ \textbf{do}\ S\ \textbf{od}\ \{p \wedge \neg e\}}$$

mit *Schleifeninvariante* p. Betrachte:

$\{A = ggt(x,y) \wedge a = x \wedge b = y)\} \rightsquigarrow \{A = ggt(a,b)\}$

while $a \neq b$ **do**

$\{a \neq b \wedge A = ggt(a,b)\}$

if $a > b$ **then** $a \leftarrow a - b$ **else** $b \leftarrow b - a$ **fi**

$\{A = ggt(a,b)\}$.

od

$\{A = ggt(a,b) \wedge a = b\} \rightsquigarrow \{a = A = ggt(x,y)\}$

Der Hoaresche Kalkül: Beweisskizzen mit Ergänzungshinweisen

Hinweis: Partielle Korrektheit! (WO?)

$\{\textbf{true}\} \rightsquigarrow \{0 * y = 0\}$

$a \leftarrow 0$; (Z)

$\{a * y = 0\} \rightsquigarrow \{a * y + x = x\}$ *Zusicherungsnotation*

$b \leftarrow x$; (Z)

$\{a * y + b = x\}$ *Schleifeninvariante wird durch zwei Zuweisungen eingerichtet*

while $b \geq y$ **do**

$\{a * y + b = x \wedge b \geq y\} \rightsquigarrow \{(a + 1) * y + (b - y) = x \wedge b - y \geq 0\}$

$b \leftarrow b - y$; (Z)

$\{(a + 1) * y + b = x (\wedge b \geq 0)\}$

$a \leftarrow a + 1$; (Z)

$\{a * y + b = x\}$ *Schleifeninvariante wird durch Schleifenrumpf erhalten*

od (W)

$\{a * y + b = x \wedge \neg(b \geq y)\} \rightsquigarrow \{a * y + b = x \wedge b < y\}$

Der Hoaresche Kalkül: Ein kleiner Tippfehler! mit Ergänzungshinweisen

Hinweis: Partielle Korrektheit!!!

$\{\textbf{true}\} \rightsquigarrow \{a * 0 = 0\}$

$y \leftarrow 0$; (Z)

$\{a * y = 0\} \rightsquigarrow \{a * y + x = x\}$

$b \leftarrow x$; (Z)

$\{a * y + b = x\}$

while $b \geq y$ **do**

$\{a * y + b = x \wedge b \geq y\} \rightsquigarrow \{(a + 1) * y + (b - y) = x \wedge b - y \geq 0\}$

$b \leftarrow b - y$; (Z)

$\{(a + 1) * y + b = x (\wedge b \geq 0)\}$

$a \leftarrow a + 1$; (Z)

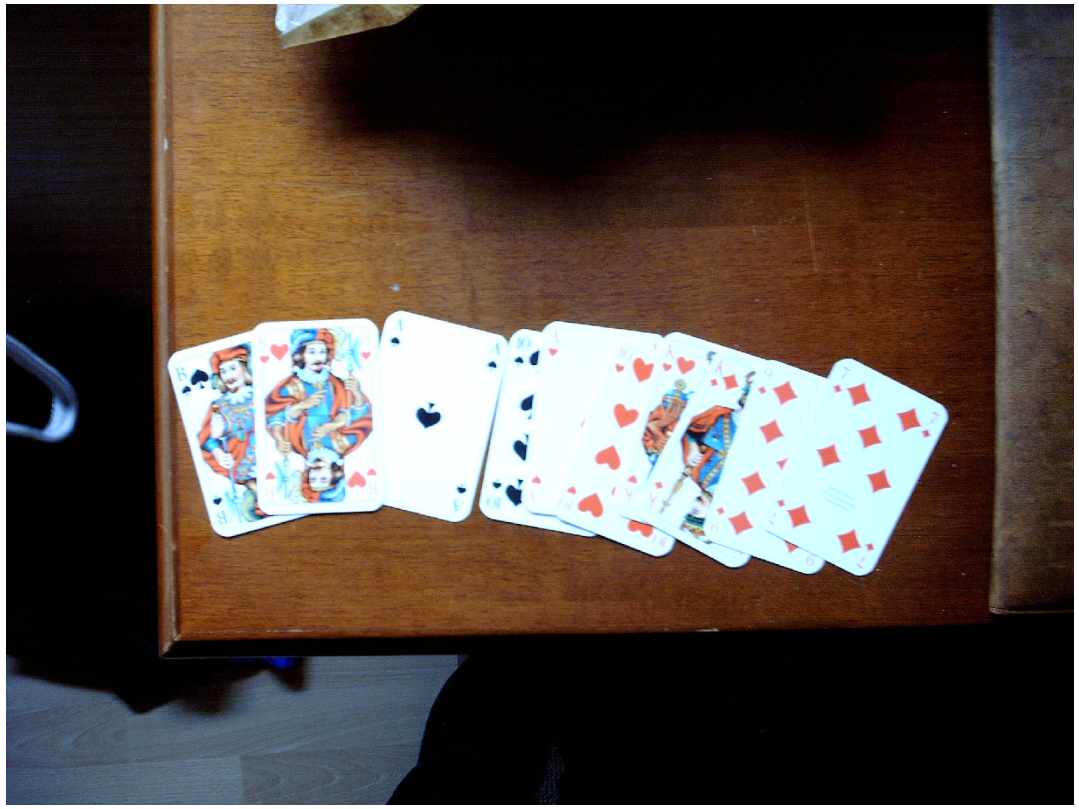
$\{a * y + b = x\}$

od (W)

$\{a * y + b = x \wedge \neg(b \geq y)\} \rightsquigarrow \{a * y + b = x \wedge b < y\}$

Sortieren durch Einfügen:

Rudimente des Hoare-Kalküls in Programmkommentaren



Schön geordnet ? Aber wie ?

Eine Ordnung muss sein !

	Grundwert	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Schellen Karo	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162
Rot Herz	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Grün Pik	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198
Eichel Kreuz	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216
Grand	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240								
	(neu)						mit	1	2	3	4							
Grand Ouvert	24							192	216	240	264							
		Hand		Ouvert		Hand/Ouvert												
Null	23	35		46		59												

Reizen

18	70	144
20	72	150
22	77	153
23	80	154
24	81	156
27	84	160
30	88	162
33	90	165
35	96	170
36	99	176
40	100	180
44	108	187
45	110	192
46	117	198
48	120	204
50	121	216
54	126	240
55	130	264
59	132	
60	135	
63	140	
66	143	

Spitzen mit/ohne	Sp.	Hand	Schneider		Schwarz		Ouvert
			gesp	ang.	gesp	ang.	
1	2	3	3/4	5	4/5/6	7	8
2	3	4	4/5	6	5/6/7	8	9
3	4	5	5/6	7	6/7/8	9	10
4	5	6	6/7	8	7/8/9	10	11
5	6	7	7/8	9	8/9/10	11	12
6	7	8	8/9	10	9/10/11	12	13
7	8	9	9/10	11	10/11/12	13	14
8	9	10	10/11	12	11/12/13	14	15
9	10	11	11/12	13	12/13/14	15	16
10	11	12	12/13	14	13/14/15	16	17
11	12	13	13/14	15	14/15/16	17	18
			↑ Spiel/Hand		↑ Spiel/Hand/Schneider ang.		

Bsp. Grand Ouvert: mit 3 Spiel 4, Hand 5, Schneider angesagt 6, Schneider gespielt 7, Schwarz angesagt 8, Schwarz gespielt 9, Ouvert 10 = 24 mal 10 = 240
Bsp. Grand: mit 3 Spiel 4, Schneider gespielt 5, Schwarz gespielt 6 = 24 mal 6 = 144

Regeln (kurz)

- Trümpfe in ununterbrochener Reihenfolge heißen Spitze (auch Ass,10.Kö. usw.)
- Spieler gewinnt mit 61 Punkten (Gegenspieler mit 60)
- Schneider ist 30 Punkte oder weniger (Spieler und Gegenspieler)
- Schwarz bedeudet keinen Stich (es zählt was gesp. nicht was möglich) (auch Ouvert)
- Alleinspiel verloren zählt doppelt minus (auch bei Handspiel (neu))
- Schneider,Schwarz und Ouvert können nur bei Handspielen angesagt werden (außer Null)
- Ouvert schließt Schwarz, Schwarz schließt Schneider ein
- bei Ouvert werden Karten **vor** dem ersten Ausspiel offen gelegt (auch Null)
- Sonderspiele (Schneider usw.) müssen **vor** erstem Ausspiel angesagt werden
- Wenn alle passen wird eingemischt und der nächste gibt
- Karten im Skat zählen mit für die Gewinnstufe (auch bei Handspiel)
- bei angesagtem Schneider zählt Eigenschneider nicht mit
- Falschspielen gilt mit gespielter Gewinnstufe als verloren, Schneider, Schwarz wird nur mit Nachweis angerechnet (nache Spielende kein Beanstandung mehr)
- gewonnen ist gewonnen auch bei Falschspiel (z.B. über 60)
- Spiel zählt mit mindestens der Gewinnstufe die mit den Karten\Reizwert niedrigstens möglich wäre, sonst gespielte (mit allen spitzen auch Skat)

Sortieren durch Einfügen: Wie geht es beim Skat ?

Verfahren / Vorgehen:

Die neu hinzukommende Karte wird gemäß der “Skatordnung” eingefügt.

Die Herz 10 wird daher zwischen der Pik-Karte und der bisherig höchsten Herz-Karte gesteckt.

Ein Beispiel mit Zahlen

Die folgende Tabelle zeigt die Sortierschritte zum Sortieren der Folge

5 7 0 3 4 2 6 1 .

5	7	0	3	4	2	6	1	(0)
5	7	0	3	4	2	6	1	(0)
0	5	7	3	4	2	6	1	(2)
0	3	5	7	4	2	6	1	(2)
0	3	4	5	7	2	6	1	(2)
0	2	3	4	5	7	6	1	(4)
0	2	3	4	5	6	7	1	(1)
0	1	2	3	4	5	6	7	(6)

Auf der linken Seite rot dargestellt befindet sich jeweils der bereits sortierte Teil der Folge.
Ganz rechts steht in Klammern die Anzahl der Positionen, um die das eingefügte Element nach links gewandert ist.
Einzelheiten, einschließlich einer hübschen Simulation, finden Sie unter: `http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/sortieren/insert/insertion.htm`

Ein wenig Programmcode

```
insertionsort()
    {
        int i, j, t;
        for (i=1; i<n; i++)
        {
            j=i;
            t=a[j];
            while (j>0 && a[j-1]>t)
            {
                a[j]=a[j-1];
                j--;
            }
            a[j]=t;
        }
    }
```

Algorithm 1 Sortieren durch Einfügen: insertionsort

Input(s): an array $A : \mathbb{Z}[1..n]$

Output(s): A becomes a sorted array

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
  $t \leftarrow A[i]$ {einzufügendes Element}
  for $j \leftarrow i$ **downto** 2 **do**
    if $A[j-1] \geq t$ **then**
      exit **for**
    else
      $A[j] \leftarrow A[j-1]$ {Verschiebe}
  $A[j] \leftarrow t$ {Einfügestelle gefunden}

Algorithm 1 Sortieren durch Einfügen: Korrektheitsbetrachtungen

Input(s): an array $A : \mathbb{Z}[1..n]$

Output(s): A becomes a sorted array

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
  {$A[1]$ bis $A[i-1]$ ist bereits aufsteigend sortiert.}
  $t \leftarrow A[i]$ {einzufügendes Element}
  for $j \leftarrow i$ **downto** 2 **do**
    {$A[1]$ bis $A[j-1]$ und $A[j+1]$ bis $A[i]$ ist aufsteigend sortiert.}
    {$\forall k : j+1 \leq k \leq i \implies t \leq A[k]$.}
    {$A[1..j-1]$ ist unverändert gegenüber Schleifenbeginn;}
    {$A[j+1..i]$ entspricht $A[j..i-1]$ vor Schleifenbeginn.}
    if $A[j-1] \geq t$ **then**
      exit **for**
    else
      $A[j] \leftarrow A[j-1]$ {Verschiebe}
  $A[j] \leftarrow t$ {Einfügestelle gefunden, d.h.: $A[j-1] \leq t \leq A[j+1]$.}

Hoare-Kalkül: eine Reflexion

Offenbar ist der Hoare-Kalkül
anwendbar in praktisch relevanten Programmiersituationen,
durchaus empfehlenswert bei sicherheitsrelevanten Anwendungen,
obwohl selbst dort oft sorgsam entworfene Tests bevorzugt werden.

ABER: Ist der Hoare-Kalkül korrekt??

In der vorigen VL haben wir Beweise stets über die Semantik Hoarescher Ausdrücke geführt.
Das sah immer recht länglich und umständlich aus.
Ist dies überflüssig geworden? Und wenn ja, warum?

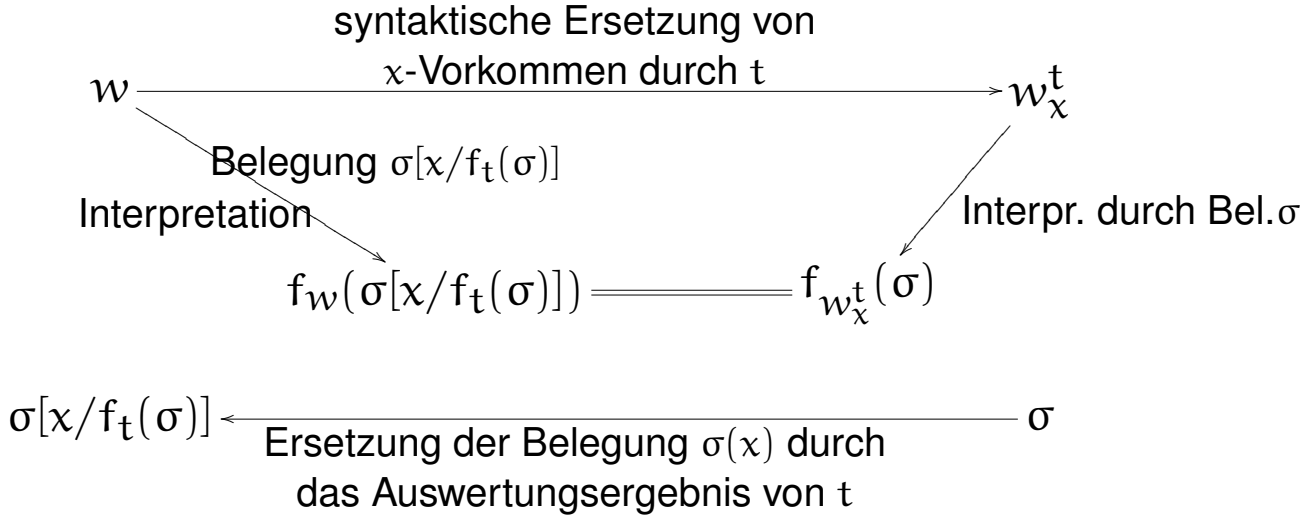
Das Substitutionstheorem

Ist w ein WAA und x eine in w vorkommende Variable und t ein weiterer WAA, so gilt für alle Belegungen σ:

$$f_{w_x^t}(\sigma) = f_w(\sigma[x/f_t(\sigma)]).$$

Entsprechende Aussagen gelten für WBTs.

Graphische Darstellung als *Diagramm*:



Der Hoare-Kalkül ist korrekt.

Das heißt: Können wir $\{p\}S\{q\}$ im Hoare-Kalkül beweisen,
so gilt für alle Belegungen σ, die die Vorbedingung p erfüllen,
dass die Belegung $\mathcal{M}\langle S\rangle(\sigma)$ die Nachbedingung q erfüllt
(sofern S terminiert).

Was ist zu zeigen:
(1) Die Axiomenschemata sind korrekt.
(2) Die Schlussregeln sind korrekt.

Daraus folgt dann die Behauptung durch einfache Induktion über die Länge einer Ableitung im Hoare-Kalkül.

Der Hoare-Kalkül ist korrekt. Beweisteile (1)

Aus $\mathcal{M}\,\langle\textbf{skip}\rangle\,(\sigma) = \sigma$ folgt sofort das Skip-Axiomenschema (S).
$\{\mathrm{p}\}$ **skip** $\{\mathrm{p}\}$ für alle WBT p.

Das Substitutionstheorem liefert unmittelbar die Korrektheit für das Zuweisungs-Axiomenschema (Z).
$\{\mathrm{p}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{x}}\}\ \mathrm{x} \leftarrow \mathrm{t}\ \{\mathrm{p}\}$ für alle WBT p und (alle $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_{\mathbb{B},\mathrm{p}}$ und alle WBT t) sowie (alle $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_{\mathbb{N},\mathrm{p}}$ und alle WAA t)

Beachte beim Nachweis der Korrektheit der Schlussregeln, dass wir immer von der Korrektheit der Prämissen ausgehen; man könnte dies auch als strukturelle Induktion begreifen.

Der Hoare-Kalkül ist korrekt. Beweisteile (2)(L)

Die Linearregel (L) ist korrekt: Betrachte

$$\frac{\{p\}\ S_1\ \{q\}\ ,\ \{q\}\ S_2\ \{r\}}{\{p\}\ S_1; S_2\ \{r\}}$$

Sei σ eine Belegung, die p erfüllt.

Wenn $S_1; S_2$ terminiert,

so gibt es Belegungen $\rho = M\langle S_1\rangle(\sigma)$ und $\tau = M\langle S_2\rangle(\rho)$.

Aus der angenommenen Korrektheit der Prämissen der Schlussregel folgt:

ρ erfüllt q und daher erfüllt τ die Nachbedingung r.

Da $\tau = M\langle S_1; S_2\rangle(\sigma) = M\langle S_2\rangle(\rho)$, folgt die Behauptung.

Beweisteil (2)(F) ist “trivial richtig.”

Der Hoare-Kalkül ist korrekt. Beweisteile (2)(I)

Betrachte die Bedingungsregel (I):

$$\frac{\{p \wedge e\}\ S_1\ \{q\}, \{p \wedge \neg e\}\ S_2\ \{q\}}{\{p\}\ \textbf{if}\ e\ \textbf{then}\ S_1\ \textbf{else}\ S_2\ \textbf{fi}\ \{q\}}$$

Ist σ eine Belegung, die $p \wedge e$ erfüllt, so bedeutet die Korrektheit der Prämisse, dass $M\langle S_1\rangle(\sigma)$ dann q erfüllt.

Da dann aber insbesondere $f_e(\sigma) = 1$ gilt, folgt $M\langle \textbf{if}\ e\ \textbf{then}\ S_1\ \textbf{else}\ S_2\ \textbf{fi}\rangle(\sigma) = M\langle S_1\rangle(\sigma)$, d.h. q ist erfüllt nach Ausführung der Verzweigung.

Der Fall einer Belegung σ, welche $p \wedge \neg p$ erfüllt, ist analog zu behandeln.

Der Hoare-Kalkül ist korrekt. Beweisteile (2)(W)

Betrachte die Schleifenregel (W):

$$\frac{\{p \wedge e\}\ S\ \{p\}}{\{p\}\ \textbf{while}\ e\ \textbf{do}\ S\ \textbf{od}\ \{p \wedge \neg e\}}$$

Setze $f = M\langle \textbf{while}\ e\ \textbf{do}\ S\ \textbf{od}\rangle$ und $g = M\langle S\rangle$.

Nach Lemma aus VL 3 gilt im Terminierungsfall:

$f(\sigma) = g^k(\sigma)$ für ein $k \geq 0$ mit $f_e(g^k(\sigma)) = 0$; $f_e(g^i(\sigma)) = 1$ für alle $0 \leq i < k$.

Daraus ergibt sich für alle $i = 0, \ldots, k$ durch Induktion $f_p(g^i(\sigma)) = 1$.

Speziell für $i = k$ folgt $f_p(\tau) = 1$ für $\tau = f(\sigma)$.

Wegen $f_e(\tau) = 0$ folgt die Behauptung $f_{p\wedge\neg e}(\tau) = 1$.

Der Hoare-Kalkül ist vollständig.

Diese Aussage wollen wir nicht beweisen, aber etwas verstehen:

Es gibt m.a.W. keine Folgerung, die wir auf der semantischen Ebene durchführen könnten, aber nicht innerhalb des Hoare-Kalküls durchzuführen wäre.

Streng genommen beruht das auch auf der Vollständigkeit des zugrunde gelegten logischen Kalküls.
Da wir diesen nicht streng formal betrachtet haben, müsste ein Beweis der Vollständigkeitsaussage notwendig deutliche Lücken aufweisen.

Das Auffüllen dieser Lücken würde 3-4 Vorlesungen beanspruchen und entfällt daher hier.

Rückschau

Bisheriges Thema: Algorithmenanalyse
Dazu notwendig: Formalisierung des Algorithmenbegriffs (Registermaschinen, WHILE-Programme) und exakte Erklärung ihrer Bedeutung (Semantik)
(a) Laufzeitanalyse: Hierzu spezieller Analyse von Rekursionen (z-Transformation, Mastertheorem)
(b) Korrektheitsbetrachtungen: Hoare-Logik / -Kälkül als eine mögliche (automatisierbare) Argumentationsweise