3. Übungsblatt	**Grundlagen der Theoretischen Informatik III**	**SS 2012**
Die Aufgaben werden am FR, 11.5., besprochen.		

1. Aufgabe: (*8 Punkte*)

Die Fibonacci-Zahlen f_i sind definiert vermöge

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1 \text{ und } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

Eine direkte Implementierung davon ist

Algorithmus 1 : FIB

```
Eingabe : n ∈ ℕ
Ausgabe : f_n
if n ≤ 1 then
   return n
else
   return FIB(n-1) + FIB(n-2)
```

1. Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 exponentielle Laufzeit besitzt. Bestimmen Sie dazu eine untere Schranke für die Anzahl der Aufrufe von FIB bei Eingabe n.
2. Geben Sie eine alternative Implementierung von FIB an, die unter uniformem Kostenmaß lineare Laufzeit besitzt.

2. Aufgabe: (*5 Punkte*)

Sei $T(n)$ die Laufzeit eines Divide-and-Conquer - Algorithmus', mit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2n$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass gilt: $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

3. Aufgabe: (*6 Punkte*)

Beweisen Sie die nachstehenden Laufzeitaussagen jeweils mithilfe des Master-Theorems.

1. Für $T(n) = 2T(n/4) + 1$ gilt $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$.
2. Für $T(n) = 9T(n/3) + n$ gilt $T(n) = \Theta(n^2)$.
3. Für $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$ gilt $T(n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$.

Neben den Rekursionsbeziehungen sollen nicht-triviale Anfangsbedingungen gelten, z.B. $T(n) = 1$ für $n = 1, \dots, k$, wobei bei $T(k)$ die angegebene Rekursionsgleichung das erste Mal sinnvoll angewendet werden kann.

4. Aufgabe: (*9 Punkte*)

Probieren Sie Ihnen vorgestellte Ansätze aus, um die wie folgt gegebenen Laufzeitaussagen in eine geschlossene Form zu überführen oder wenigstens eine einfache explizite Folge f mit $T \in \Theta(f)$ anzugeben.

1. $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1$,
2. $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\lceil \sqrt{n} \rceil) + n$,
3. $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3T(n-2)$.

Neben den Rekursionsbeziehungen sollen nicht-triviale Anfangsbedingungen gelten, konkret $T(i) = i$ für $i = 0, 1, 2, 3$. Tabellieren Sie zunächst jeweils die Folgenwerte $T(j)$ für $j = 4, \ldots, 9$.