Übungen zur Vorlesung

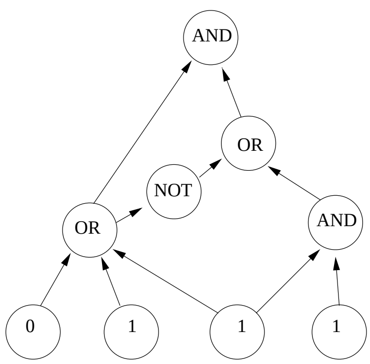
Komplexitätstheorie

Aufgabenblatt zu VL 6

In der Übung Freitag 04.12.09 um 10.05 Uhr im HZ201
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1

Das CIRCUIT VALUE PROBLEM (CVP) ist wie folgt definiert:
Es ist ein azyklischer gerichteter Graph $G(V, A)$ mit einer Senke s gegeben. Dabei gibt es drei Arten von verschiedenen Knoten.
(1) Es gibt Quellen, die mit 0 oder 1 beschriftet sind,
(2) **AND**-Knoten und **OR**-Knoten mit Eingangsgrad > 1 und
(3) **NOT**-Knoten mit Eingangsgrad 1.
AND-Knoten werden mit 1 beschriftet, falls alle Vorgänger mit 1 beschriftet sind, sonst mit 0.
OR-Knoten werden mit 1 beschriftet, falls mind, ein Vorgänger mit 1 beschriftet ist, sonst mit 0.
NOT-Knoten werden mit 1 beschriftet, falls ihr Vorgänger mit 0 beschriftet ist, sonst mit 0.
Betrachte nachfolgende Abbildung, welche eine Probleminstanz zeigt.



Gefragt ist, ob es möglich ist, s mit 1 zu beschriften.

Das MONOTONE CIRCUIT VALUE PROBLEM (MCVP) ist wie CVP definiert, besitzt aber keine **NOT**-Knoten.
Zeigen Sie nun: $CVP \leq_L MCVP$.

Tipp: Überlegen Sie, wie de Morgan die **NOT**-Knoten losgeworden wäre!

Bitte wenden!

Aufgabe 2
Das Planar Circuit Value Problem (PCVP) ist wie CVP definiert. Aber zusätzlich wird gefordert, dass der Graph planar ist.

Zeigen Sie $CVP \leq_L PCVP$! Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Entwerfen Sie eine PCVP Instanz, die die XOR-Funktion implementiert! Geben Sie also konkret einen planaren Graphen an und dessen Knotenbeschriftung mit **AND**, **OR** und **NOT**. Geben Sie die Quellen und die Senke an. Berücksichtigen Sie dabei folgenden logischen Ausdruck:

$$(x \wedge \neg(x \wedge y)) \vee (y \wedge \neg(x \wedge y))$$

2. Entwerfen Sie nun einen planaren Graphen G mit Knotenbeschriftungen, der zwei Eingänge x, y und zwei Ausgänge a, b hat. G soll folgendes leisten: Es soll der Wert von x an a erscheinen und der Wert von y an b. Benutzen Sie das Resultat aus Teilaufgabe 1. Es sollten 3 XOR-Funktion ausreichen.

Aufgabe 3
Linear Inequalities ist folgendes Problem:

Gegeben: Eine ganzzahlige $n \times d$ Matrix A und ein ganzzahliger $n \times 1$ Vektor b.
Frage: Gibt es einen rationalen $d \times 1$ Vektor mit $Ax \leq b$?

Zeigen Sie: CVP $\leq_L$ Linear Inequalities.

Tipp: Sie müssen die **AND**, **OR** und **NOT** Gatter mit Hilfe von Ungleichungen simulieren. Die Eingänge $x_1 \ldots x_n$ können wie folgt simuliert werden:
Falls eine 1 an x_i anliegt, dann füge $x_i = 1$ (bzw. $x_i \leq 1$ und $1 - x_i \leq 0$) hinzu, falls 0 anliegt $x_i = 0$.

Ein **OR** kann so simuliert werden: Seien u, v die Eingänge und w der Ausgang: $0 \leq w \leq 1$, $u \leq w$, $v \leq w$ und $w \leq v + u$.