Komplexitätstheorie

WiSe 2009/10 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Komplexitätstheorie Gesamtübersicht

- Organisatorisches / Einführung
  Motivation / Erinnerung / Fragestellungen

- Diskussion verschiedener Komplexitätsklassen:
  Zeitkomplexität
  Platzkomplexität

- zugehörige Reduktionsbegriffe

- vollständige Probleme

- Anpassung von Klassenbegriffen und Reduktionen

P- und NP-Vollständigkeit

Einn *And/Or-Graph* ist ein Paar (G, L) aus
—Graph $G = (V, E)$ und
—*Label-Funktion* (*Beschriftung*) $L\colon V \to \{\mathtt{and}, \mathtt{or}\}$
Darstellung eines And/Or-Graphen als $(g)(l_1 \ldots l_n)$
—g übliche Adjazenzmatrix von G
—$l_i \in \{0, 1\}$ für Label (Beschriftung) $L(i)$ der Knoten i

$$l_i = 0 \Leftrightarrow L(i) = \mathtt{and}$$

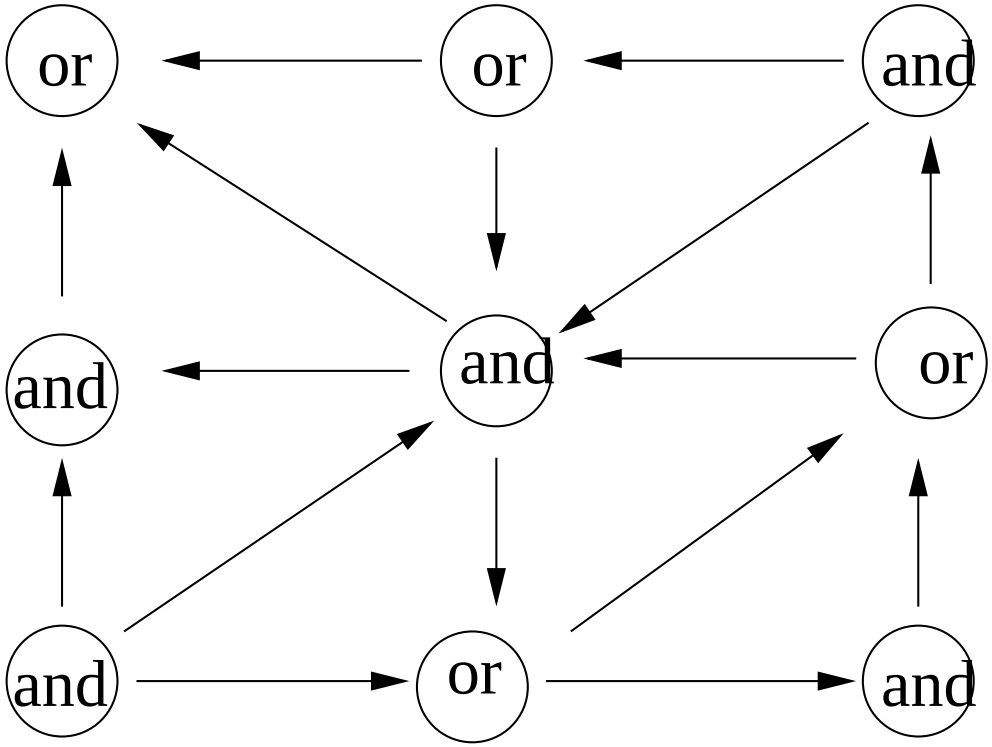
Variante des Pebble-Spiels:

- Ein Knoten ohne Vorgänger kann jederzeit markiert werden.
- Ein Knoten mit Beschriftung `and` kann markiert werden, wenn sämtliche Vorgänger dieses Knotens markiert sind.
- Ein Knoten mit Beschriftung `or` kann markiert werden, wenn mindestens einer seiner Vorgänger markiert ist.

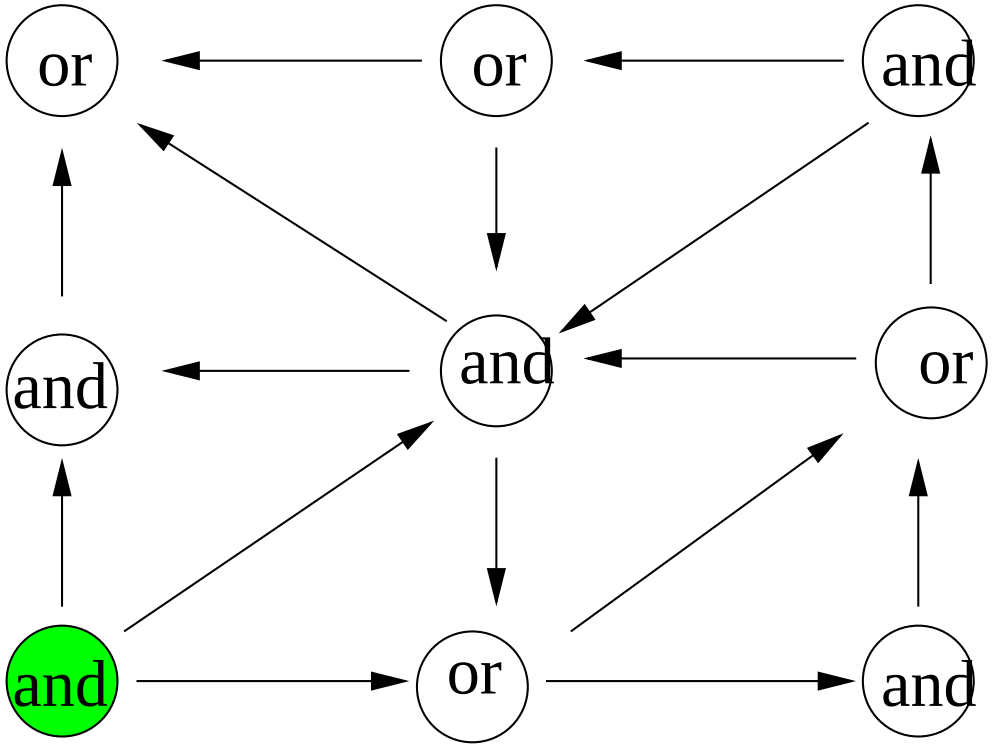
$\rightsquigarrow$ *Problem* `AGAP` *(And/Or-Graph Accessibility Problem)*:

- Gegeben sei ein And/Or Graph (G, L).
- Frage: Kann mit dem obigen Pebble-Spiel ein Knoten ohne Nachfolger markiert werden?

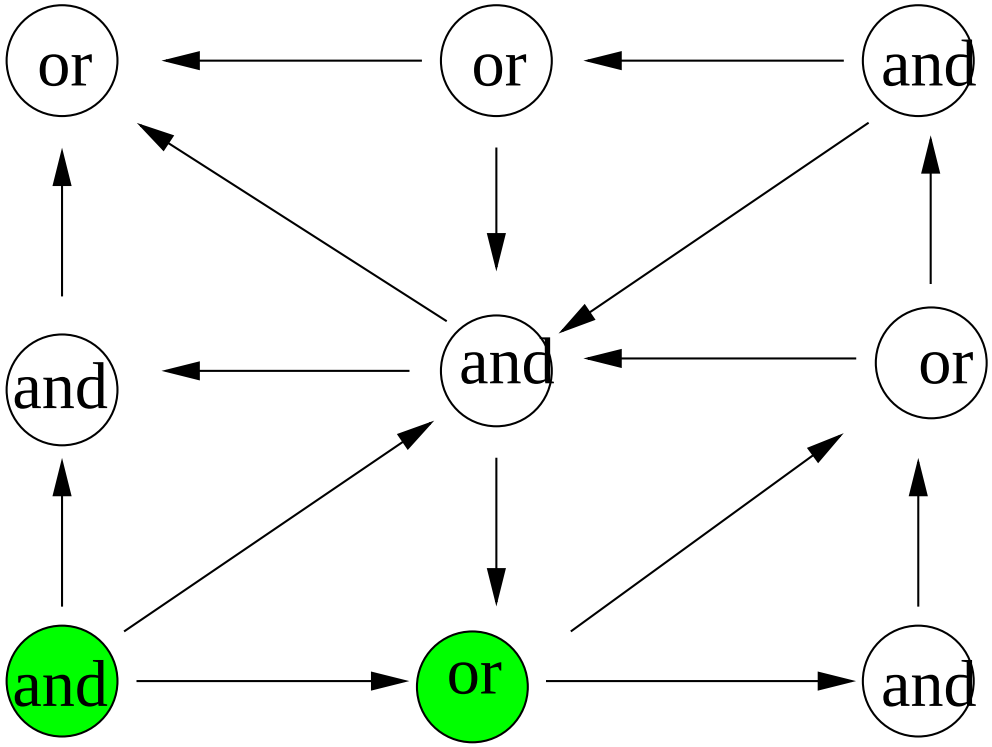
Beispiel:



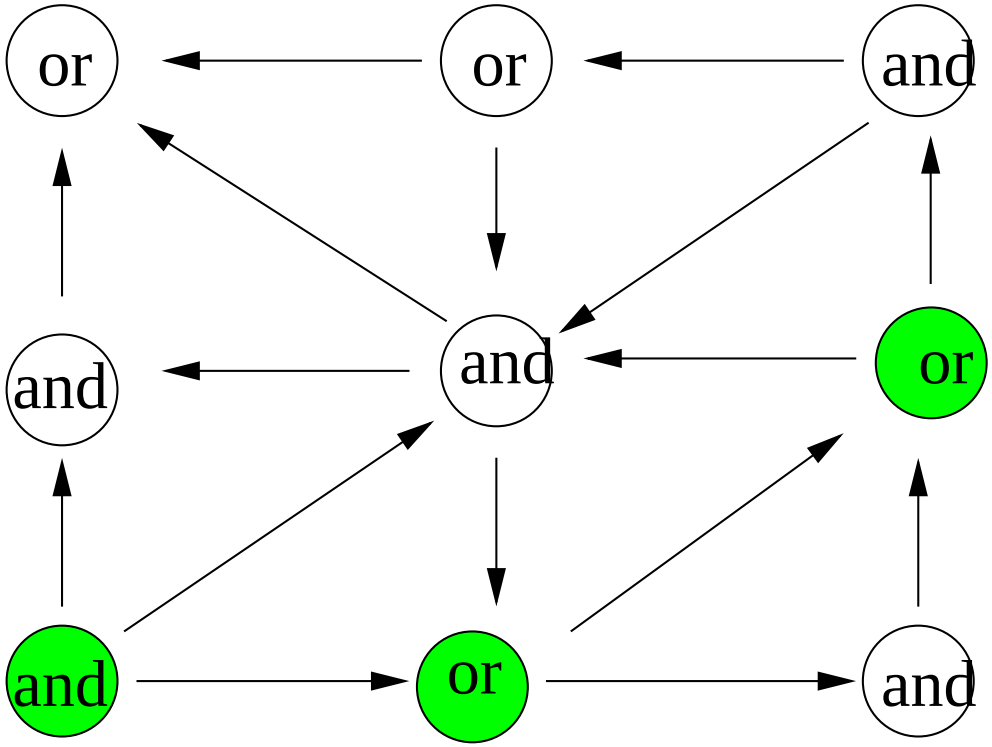
Beispiel:



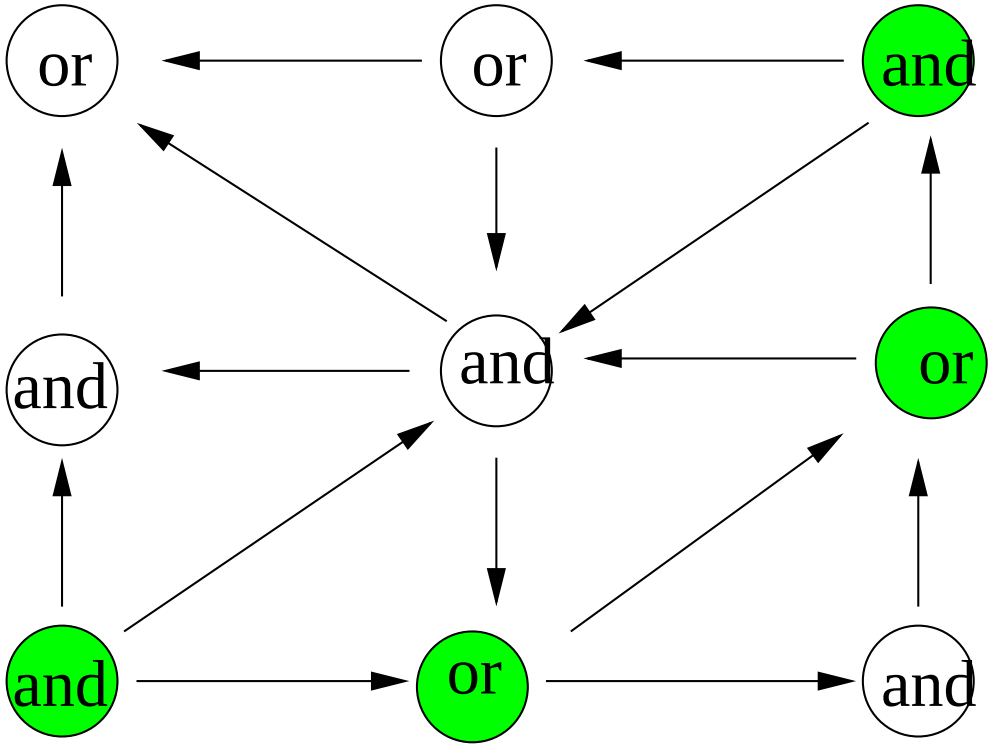
Beispiel:



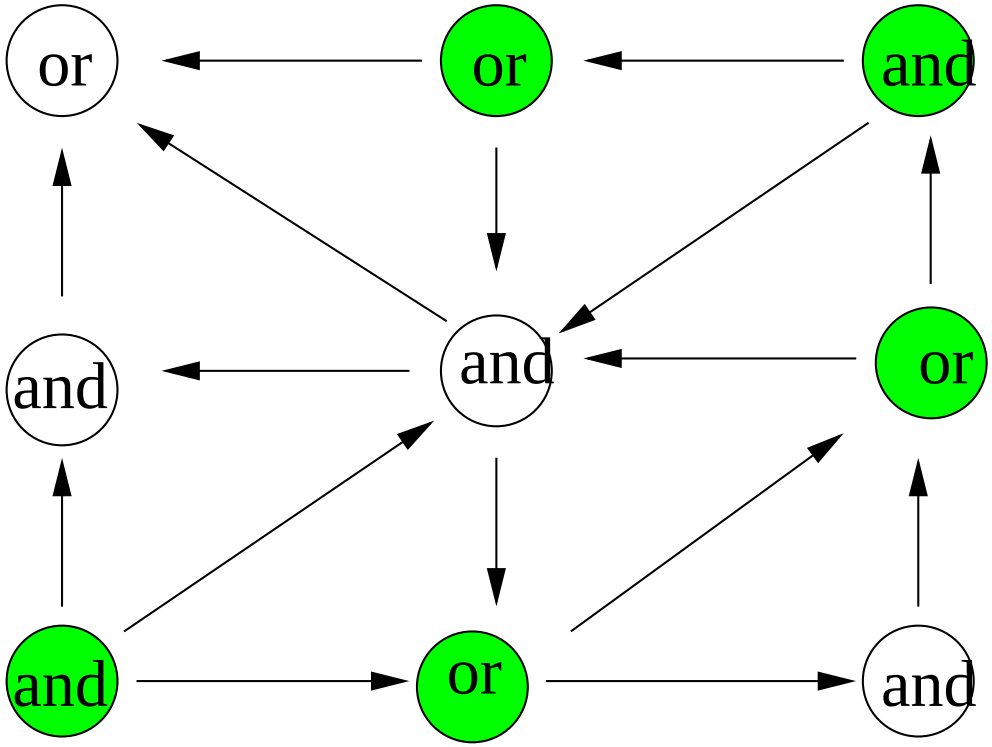
Beispiel:



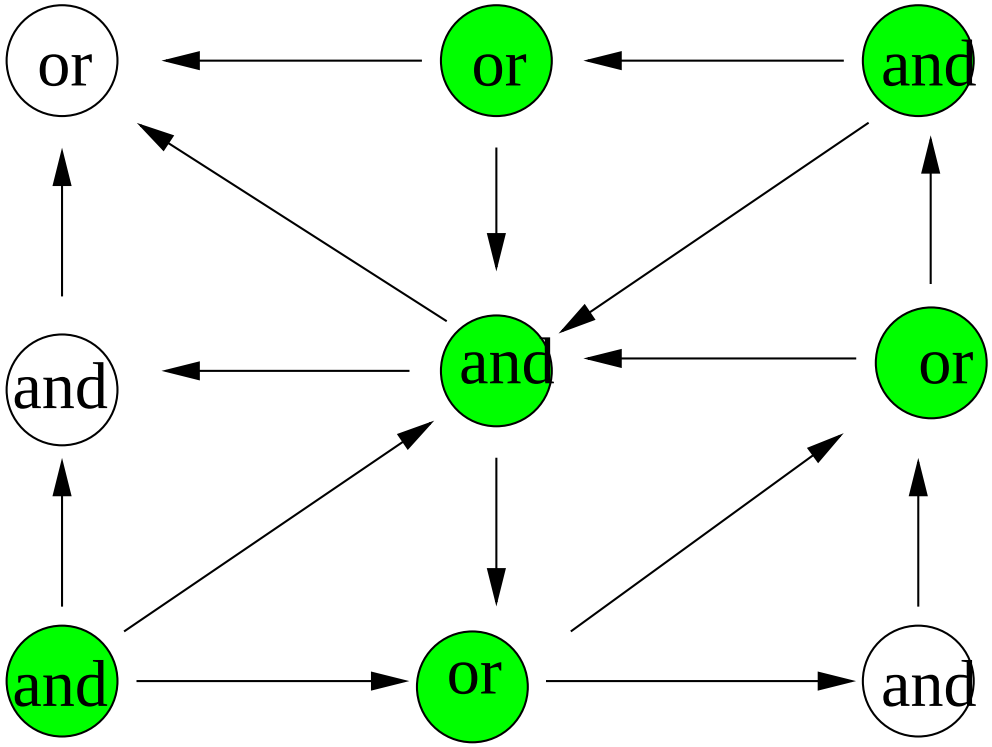
Beispiel:



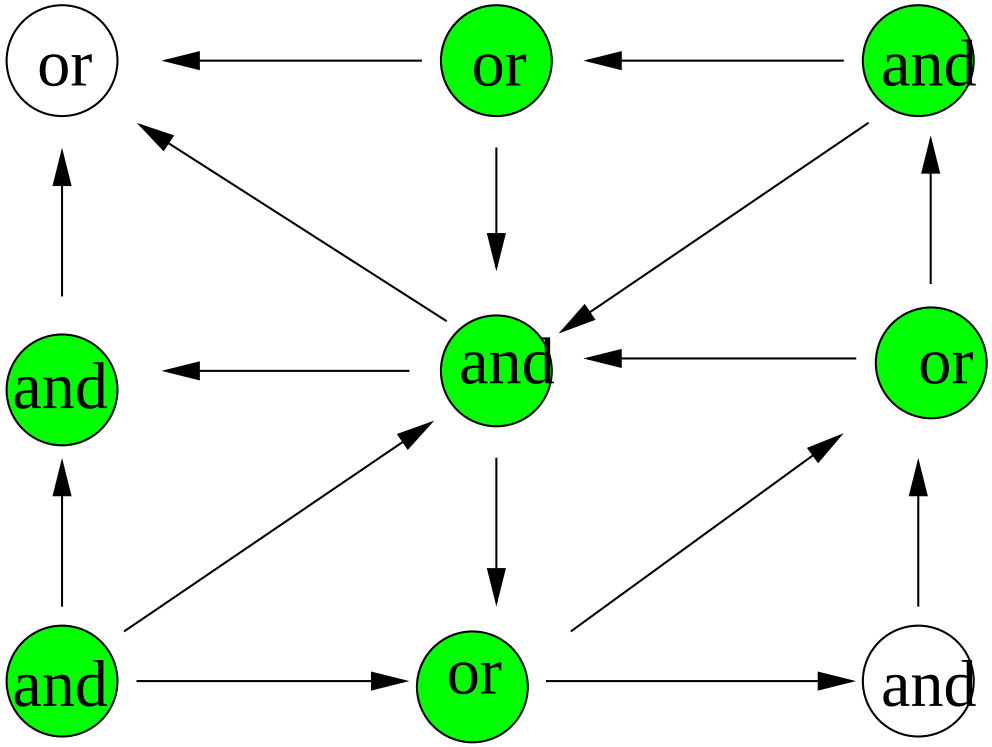
Beispiel:



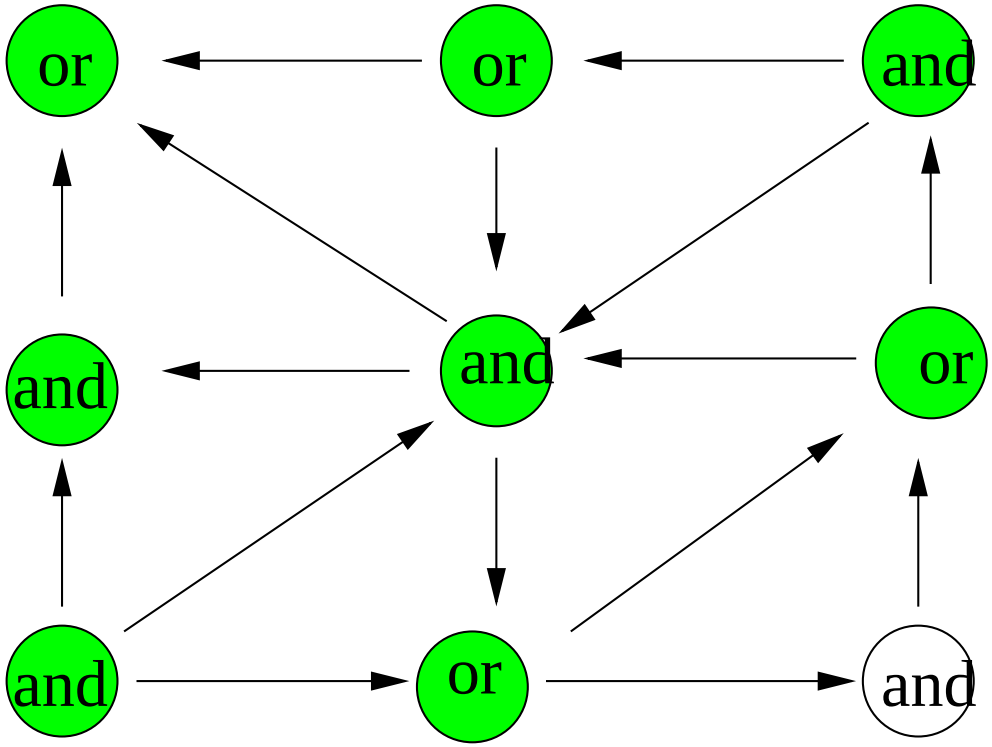
Beispiel:



Beispiel:



Beispiel:



Lemma 1 $\texttt{AGAP} \in \mathbf{P}$

Beweis: “Solange möglich, finde neue Markierungsmöglichkeit” liefert (ganz einfach) quadratischen Aufwand für das Problem.

Satz 2 $\texttt{AGAP}$ *ist* $\mathbf{P}$*-vollständig (bzgl.* $\leq_{\log}$*).*

Ein ausführlicher Beweis für die Härte würde sicher 15 Folien kosten, daher folgt ein Abriss eines Beweises.

AGAP ist P-vollständig: Grundidee

Betrachte $L \in \mathbf{P}$ bel. $L \subseteq W(\Sigma)$ wird von det. TM M akzeptiert mit
$T_M(x) \leq c\lg(x)^k + c =: t(x)$ für geeignete Konstanten k, c.
O.E.: M hat nur ein Arbeitsband und beschreibt nie das Ausgabeband.
$\rightsquigarrow$ Konfigurationen darstellbar durch (z, i, w_ℓ, a, w_r) (s. **NL**-Vollständigkeit für GAP)
In jeder Konfig., die von $I_M(x)$ in $t \leq t(x)$ Schritten erreichbar ist, gilt:
$\lg(w_\ell) + \lg(w_r) \leq t(x)$.
Konstruktion eines AND/OR-Graphen (G_x, L_x) mit $x \in L \iff (G_x, L_x) \in \mathtt{AGAP}$.
Jeder Knoten entspricht (i.W.) einer Aussage über eine von $I_M(x)$ aus erreichbare Konfig.
(G_x, L_x) wird so konstruiert, dass nur Knoten für wahre Aussagen markiert werden können.

Grundaufbau von $G_x = (V_x, E_x)$

Es gibt genau einen Knoten *START* ohne Vorgänger.

Von START aus können Knoten für $I_M(x)$ markiert werden.

Es gibt genau einen Knoten *ZIEL* ohne Nachfolger.

ZIEL kann markiert werden, wenn ein markierter Knoten aussagte: Endkonfig. wurde erreicht.

Es gibt einen weiteren Knoten *KEINSTART*, der Vorgänger aller Knoten außer START ist.

Insbesondere ist KEINSTART Vorgänger von KEINSTART.

Es gibt einen weiteren Knoten *KEINZIEL*, der Nachfolger aller Knoten außer ZIEL ist.

Insbesondere ist KEINZIEL Nachfolger von KEINZIEL.

Nach Def. des Pebble-Spiels muss die Markiererei bei Knoten vom Eingangsgrad Null beginnen. $\rightsquigarrow$ Nur START kommt dafür in Frage.

Ebenso ist die Markiererei nur dann “erfolgreich”, wenn ein Knoten vom Ausgangsgard Null erreicht wird. $\rightsquigarrow$ Nur ZIEL kommt dafür in Frage.

Die bislang aufgeführten Knoten werden OR-beschriftet.

Hauptknoten von V_x I,

denen ein Zeitpunkt $t \leq t(x)$ zugeordnet werden kann.

$S(t, p, \gamma)$: Nach $0 \leq t \leq t(x)$ Schritten steht γ auf Position p, $-t(x) \leq p \leq t(x)$, auf dem Arbeitsband.
$P(t, i)$: Nach $0 \leq t \leq t(x)$ Schritten steht der Eingabekopf auf dem i-ten Zeichen von x, $0 \leq i \leq lg(x) + 1$.

Eingangs $P(0, 0)$ markierbar, $P(0, i)$ jedoch nicht für $i > 0$.

$Z(t, z)$: Nach $0 \leq t \leq t(x)$ Schritten wurde Zustand z erreicht.

Die voranstehenden Knoten werden mit OR beschriftet.

Damit für $t = 0$ alle Knoten markiert werden können, die wahren Aussagen über $I_M(x)$ entsprechen, werden die Kanten $(\text{START}, Z(0, z_0))$, $(\text{START}, P(0, 0))$ und $(\text{START}, S(0, p, B))$ für $-t(x) \leq p \leq t(x)$ in E_x aufgenommen.
Außerdem werden $(Z(t, z_e), \text{ZIEL})$ für Endzustände z_e Kanten.

Hauptknoten von V_x II,

denen ein Zeitpunkt $t \leq t(x)$ zugeordnet werden kann.

$B(t, b)$: Im Schritt t wird Befehl b ausgeführt.

Nach unserer TM-Def. hängt der Befehl nur vom Zustand ab, daher gibt es (im positiven Fall) Kante von $Z(t-1, z)$ nach $B(t, b)$. $B(t, b)$ wird mit OR beschriftet.

$B \wedge S(t, b, p, \gamma)$: Soll markiert werden können, wenn $B(t, b)$ und $S(t-1, p, \gamma)$ "wahr" sind.

Also: Vor Schritt t steht γ and der p-ten Stelle des Arbeitsbands und es soll der Befehl b ausgeführt werden. $\rightsquigarrow$ AND-Beschriftung.

$B \wedge P(t, b, i)$: Soll markiert werden können, wenn $B(t, b)$ und $P(t-1, i)$ "wahr" sind. $\rightsquigarrow$ AND-Beschriftung.

Dann kann z.B. $S(t, p, \gamma)$ mit Hilfe von $B \wedge S(t, b, p, \gamma)$ richtig gesetzt werden.

Zur Komplexität der Konstruktion

Die Knotenarten enthalten allesamt Zahlen nur genauen Angabe;
diese können daher in $\mathtt{FSPACE}(\log)$ erzeugt werden.
Ähnliches gilt für die Kanten.

Beachte: Reduktionsmaschine kennt χ.

Zur Korrektheit der Konstruktion

Durch Induktion über t zeigt man folgende Aussagen:
(1) Für jedes t und jedes p gibt es maximal ein γ, für das $S(t,p,\gamma)$ markiert werden kann.
(2) Für jedes t gibt es maximal ein i und ein z, sodass (a) $P(t,i)$ und (b) $Z(t,z)$ markiert sind.
(3) Für jedes $t \geq 1$ gibt es maximal ein b, sodass $B(t,b)$ markiert ist.
(4) Ist zu einem t ein Knoten $Z(t,z)$ markiert, so ebenfalls ein $P(t,i)$ und für jedes p ein $S(t,p,\gamma)$.
(5) Ist für ein t ein $Z(t,z)$ oder $S(t,p,\gamma)$ oder $P(t,i)$ markiert, so ist auch für jedes $t' < t$ ein $Z(t',z')$ markiert.

Die Menge aller in G_x markierbaren Knoten definiert damit eindeutig eine Folge von Konfigurationen $K_0, \ldots, K_m$ mit $K_0 = I_M(x)$, K_m ist Endkonfiguration, $K_i \to_M K_{i+1}$.
Die markierten Knoten entsprechen wahren Aussagen über die Konfigurationen, und kein Knoten mit Index $t' > t$ wurde markiert.
Umgekehrt gilt Entsprechendes.

Kleine Modifikation von Problem + Beweis
$\Longrightarrow$ **NP-Vollständigkeit**!

Problem `AGAP mit verbotenen Paaren` (kurz: `AGAPvP`):

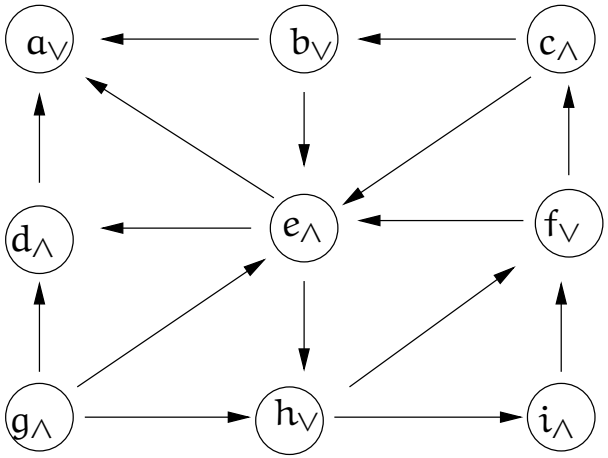
- Gegeben seien ein And/Or Graph (G, L) und eine Menge

  $$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\}$$

  von Paaren von Knoten (die *verbotenen Paare*)

- Frage: Kann mit dem obigen Pebble-Spiel ein Knoten ohne Nachfolger markiert werden, wenn von jedem verbotenen Paar maximal ein Knoten markiert werden darf?

Beispiel zu AGAPvP



Menge der verbotenen Paare: (b, i), (h, d).
Möglicher Ablauf des Pebble-Spiels:
$g \to h \to f \to c \to b \to a$.
Beobachte: d und i werden nicht markiert.

Achtung: Im Ggs. zu AGAP darf nicht jederzeit jeder markierbare Knoten auch markiert werden. Es muss also richtig geraten werden.
Beispiel: $g \to h \to i \to f \to c$ bleibt stecken.

Folgerung 3 $\texttt{AGAPvP}$ *ist* $\mathbf{NP}$*-vollständig (bzgl.* $\leq_{\log}$*).*

Beweisidee: Zu gegebener nichtdet. TM M zur Akzeptanz von $L \in \mathbf{NP}$ mit $T_M(x) \leq c\lg(x)^k + c$ konstruiere "wie zuvor bei $\texttt{AGAP}$" nun $\texttt{AGAPvP}$-Instanz.
M nichtdeterministisch
$\rightsquigarrow$ In Zustand z gibt es mehrere mögliche ausführbare Befehle $b \in \delta(z)$.
$\rightsquigarrow$ Definiere zu z als Menge verbotener Paare alle $(B(t,b), B(t,b'))$ mit $b \neq b'$.

Klar: Konstruktion geht in Logspace.

Gibt es "Akzeptanzweg", d.h., Konfigurationsfolge für x durch M,
so gibt es auch eine Markierungsfolge in konstruierter $\texttt{AGAPvP}$-Instanz
und umgekehrt.

Umfangreiche Liste NP-vollständiger Probleme

- Garey, M.R., Johnson, D.S., Computers and Intractability:
  A Guide to the Theory of **NP**-Completeness, Freeman, San Francisco 1979
  sowie als Fortsetzung davon:

- Johnson, D.S., The **NP**-completeness column: an ongoing guide,
  seit 1981 in der Zeitschrift "Journal of Algorithms",
  später in "ACM Transactions on Algorithms"

Noch einmal als Merksatz:

Solange es nicht gelungen ist, $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ zu beweisen, ist für keines der **NP**-vollständigen Probleme ein praktisch verwendbarer Algorithmus bekannt!

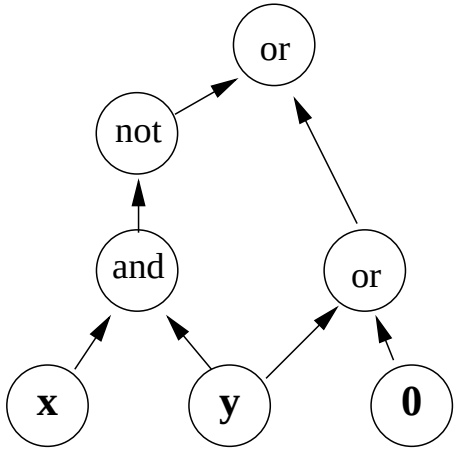
Ähnlich zu AGAP / AGAGvP: **Boole'sche Schaltkreise**

Schaltkreis:
—gerichteter Graph (V, E)
—markierte (s.u.) Knoten $V = \{1, 2, \ldots n\}$
—$x < y$ bei jeder Kante $(x, y) \in E$

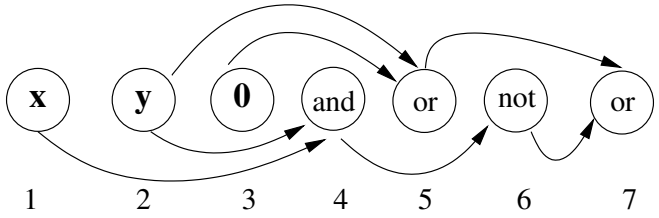
$\rightsquigarrow$ Graph zyklenfrei, bereits topologisch sortiert.

Markierungen:
—In-Grad 0: Konstanten 0, 1, boole'sche Variablen $x_1, x_2, \ldots$
—In-Grad > 0: logische Operatoren $\vee$, $\wedge$
—Ingrad 1: evtl. Negation $\neg$

Boole'sche Variablen mit logischen Werten belegt
$\Rightarrow$ Wert des Knotens n als *Ausgabewert*



topologisch sortiert:



- `CIRCUIT VALUE`:
  Gegeben sei ein Boole'scher Schaltkreis über $\{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ *ohne Variablen*.
  Frage: Ist der Ausgabewert gleich 1?

- `MONOTONE CIRCUIT VALUE`:
  Gegeben sei ein Boole'scher Schaltkreis über $\{\vee, \wedge, 0, 1\}$ *ohne Negation und ohne Variablen*.
  Frage: Ist der Ausgabewert gleich 1?

- `CIRCUIT SAT`:
  Gegeben sei ein Boole'scher Schaltkreis über $\{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ *mit Variablen*.
  Frage: Gibt es eine Variablen-Belegung mit Ausgabewert 1?

Folgerung 4 *Sowohl* `CIRCUIT VALUE` *als auch* `MONOTONE CIRCUIT VALUE` *sind* **P***-vollständig,* `CIRCUIT SAT` *ist* **NP***-vollständig.*

MONOTONE CIRCUIT VALUE ist P-hart

Kleine Modifikation zum AGAP-Beweis:
Entferne die Schlingen an den Knoten KEINSTART und KEINZIEL
$\rightsquigarrow$ So modifizierter Graph G'_x ist zyklenfrei.
ZIEL sei in topologischer Sortierung der letzte Knoten und legt so den Ausgabewert fest.
Die beiden einzigen Knoten mit Eingangsgrad Eins sind START und KEINSTART; START bekommt den Wert 1 zugewiesen und KEINSTART 0 (als Eingabe).

Alternativ hätte man KEINSTART auch gänzlich löschen können.

Offenbar: $G_x \in$ AGAP $\iff$ $G'_x \in$ MONOTONE CIRCUIT VALUE.

Mehr Argumente für die Folgerung

Klar: Die Auswertung eines Schaltkreises kann mit einem deterministischen Polynomzeitalgorithmus erfolgen.
$\leadsto$ Sowohl `CIRCUIT VALUE`
als auch `MONOTONE CIRCUIT VALUE` sind **P**-vollständig.

`CIRCUIT SAT` ist **NP**-vollständig:
(1) Härte: Die Befehlsauswahl (bei `AGAPvP`) im `t`-ten Schritt kann durch Variablenbelegung simuliert werden.
(2) in **NP**: Rate zunächst Variablenbelegung;
dann erfolgt Überprüfung (`CIRCUIT VALUE`)

Guess and Check ist übliche Strategie für **NP**-Algorithmen.

Im Folgenden **NP**-vollständige Probleme aus verschiedenen Problembereichen:

Logik, Graphentheorie, Mengen- und Zahlentheorie