Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

Aufgabenblatt zu VL 11

In der Übung Freitag 20.1.2012 um 10.05 Uhr im HZ201
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

PLANNING ist folgendes Problem:
Eingabe: Eine endliche Menge C von *Eigenschaften* und eine Menge $O \subseteq \{-,+,0\}^C$ von *Operationen* sowie eine *Ausgangskonfiguration* C_α und eine *Zielkonfiguration* C_ω.
Frage: Gilt $C_\alpha \Rightarrow_O^* C_\omega$?

Hierbei sei $\Rightarrow_O^*$ die reflexive transitive Hülle der Relation $\Rightarrow_O \subseteq 2^C \times 2^C$, die wie folgt definiert ist:
Für $C_1, C_2 \subseteq C$ gelte $C_1 \Rightarrow_O C_2$ gdw. es eine Operation $o \in O$ gibt, $o : C \to \{-,+,0\}$, mit:
(A) $C_2 = \{x \in C \mid (o(x) = +) \vee (x \in C_1 \wedge o(x) = 0)\}$ und
(B) $\forall x \in C : o(x) = - \implies x \in C_1$.
Um das Wirken einer konkreten Operation $o \in O$ zu beschreiben, mit der C_2 aus C_1 entsteht, notieren wir auch $C_1 \Rightarrow_o C_2$.
Mit anderen Worten: C_2 entsteht aus C_1, indem die mit $-$ etikettierten Eigenschaften aus C_1 gelöscht werden (sie galten vor der, gelten aber nicht mehr nach der Durchführung von Operation o), die mit $+$ etikettierten Eigenschaften jedoch (neu) hinzukommen. Die mit 0 etikettierten Eigenschaften aus C_1 bleiben erhalten.

Eine *Lösung* (also ein Beweis für $C_\alpha \Rightarrow_O^* C_\omega$) lässt sich also angeben durch eine Folge $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_t$ von Teilmengen von C (genannt *Konfigurationen*) mit $C_0 = C_\alpha$ und $C_t = C_\omega$ und einer Folge von Operationen $o_1, \ldots, o_t$, mit $o_j \in O$, sodass $C_{j-1} \Rightarrow_{o_j} C_j$.

Hinweis: Planungsprobleme erscheinen in einer Vielzahl von praktischen Kontexten. Daher sind sie auch einer der Gegenstände in der Vorlesung über Multiagentensysteme von Prof. Timm.

1. Formalisieren Sie ein Planungsszenario für eine Frachtfluggesellschaft mit Flughäfen $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_f\}$, Transportgütern $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_g\}$ und Maschinen $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$.

   Beispielsweise könnte $C_\alpha \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G} \cup \mathcal{F} \times \mathcal{M}$ die Ausgangslage beschreiben.

   Diskutieren Sie auch, wie realistisch Ihr Modell ist.

2. Zeigen Sie die PSPACE-Härte von PLANNING, indem Sie zeigen, wie man PEBBLE als Planspiel modellieren kann. Geben Sie die Transformation genau an und diskutieren Sie deren Komplexität.

3. Zeigen Sie, dass es lösbare Instanzen (C, O) von PLANNING gibt, deren kürzeste Lösungen exponentiell in $|C|$ lang sind, obwohl $|O| \leq |C|$ gilt. Hinweis: Binärzähler

4. Wie groß ist der "Suchraum" für eine PLANNING-Instanz (C, O)? Definieren Sie hierzu einen gerichteten Graphen G zu (C, O), sodass sich das Auffinden einer Lösung zu (C, O) mit Hilfe des Grapherreichbarkeitsproblemes lösen lässt.

5. Benutzen Sie Ihre Überlegungen aus dem vorigen Punkt sowie Ihnen bekannte Resultate aus der Komplexitätstheorie (welche genau?), um zu schlussfolgern, dass PLANNING in PSPACE liegt.

6. Wie sähe also konkret ein PSPACE-Algorithmus für PLANNING aus?

7. In welcher Zeit ließe sich PLANNING (deterministisch) lösen? Entspricht dies dem Zeitbedarf Ihres im vorigen Punkt vorgeschlagenen Algorithmus?