Komplexitätstheorie

WiSe 2011/12 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Komplexitätstheorie Gesamtübersicht

- Organisatorisches / Einführung
  Motivation / Erinnerung / Fragestellungen

- Diskussion verschiedener Komplexitätsklassen:
  Zeitkomplexität
  Platzkomplexität

- zugehörige Reduktionsbegriffe

- vollständige Probleme

- Anpassung von Klassenbegriffen und Reduktionen

Orakel-Turingmaschinen

Eine *Orakel-Turingmaschine* ist eine Turingmaschine M mit einem speziellen *Anfrage-Band* (engl.: query tape) und drei Zuständen

$$\mathfrak{q}_? \quad \mathfrak{q}_{yes} \quad \mathfrak{q}_{no}$$

Berechnung von M: nutzt Eingabe und zudem eine *Orakel-Menge* A.

Meist: M arbeitet wie eine normale (det. / n.det.) Turingmaschine.

Orakel-Turingmaschinen

Meist: M arbeitet wie eine normale (det. / n.det.) Turingmaschine.
Ausnahme: M erreicht den Zustand $\mathrm{q}_?$ bei Orakel A.

—Orakel sei A
—$\mathfrak{a}$ sei Inhalt des Anfrage-Bandes

$\Rightarrow$ in einem Schritt:
—bei $\mathfrak{a} \in A$ geht M in q_{yes} über
—bei $\mathfrak{a} \notin A$ geht M in q_{no} über

Akzeptanz von Worten: wie bisher ...
$\mathrm{L}(\mathrm{M}^A)$:= von der Orakel-Turingmaschine M bei Orakel A akzeptierte Sprache.

Orakel-Turingmaschinen

Sei $\mathcal{K}$ Komplexitätsklasse, A ein Orakel:
$\mathcal{K}^A$:= Klasse aller Sprachen, die beim Orakel A in der Komplexitätsklasse $\mathcal{K}$ liegen.

Beispiele:

$$\mathcal{K}^{\emptyset} = \mathcal{K}$$

$$\texttt{CHROMATIC NUMBER} \in \mathbf{P}^{\texttt{FÄRBBARKEIT}}$$

Relativierte Berechenbarkeit

Beobachtung: Viele (alle bisherigen) Simulationen zwischen Sprach- / Komplexitätsklassen / Maschinenmodellen sind *orakelstabil*;
d.h., sie funktionieren auch *relativiert* (d.h., mit einem Orakel).

Daher müsste gelten: Fall $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, so auch $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ für "viele" A.

So hoffte man, durch Betrachtung geeigneter Orakel der wichtigen Frage $\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$ näher zu kommen.

The *Millennium Prize Problems* are seven problems in mathematics that were stated by the Clay Mathematics Institute in 2000. Currently, six of the problems remain unsolved. A correct solution to each problem results in a US $1,000,000 prize (sometimes called a Millennium Prize) being awarded by the institute. Only the Poincaré conjecture has been solved, but the solver, Grigori Perelman, has not pursued the conditions necessary to claim the prize.

Satz 1 *Es gibt ein Orakel* A *mit* $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$.

Betrachte **PSPACE**-vollständiges Problem A.

(1) $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{P}^A$:
Zu $L \in \mathbf{PSPACE}$ verwende Reduktionsfunktion f_L mit $x \in L \iff f_L(x) \in A$ als Orakelanfrage.

(2) $\mathbf{P}^A \subseteq \mathbf{NP}^A$ (trivial)

(3) $\mathbf{NP}^A \subseteq \mathbf{NPSPACE}$:

Ersetze bei Orakel-Maschine M für $L \in \mathbf{NP}^A$ die Orakelanfragen $y \stackrel{?}{\in} A$ durch Berechnungen einer det. TM für A. Dies führt insgesamt zu einer **NPSPACE**-Maschine, denn bei jeder Eingabe x für M haben die Orakelanfragen y (die zur Akzeptanz führen) eine Länge polynomial in $|x|$.

(4) $\mathbf{NPSPACE} = \mathbf{PSPACE}$ (Folgerung aus dem Satz von Savitch)

Satz 2 *Es gibt ein Orakel* B *mit* $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$.

Zu einer Menge $B \subseteq \Sigma^*$ definiere: $L_{[B]} = \{0^n \mid \exists w \in B : |w| = n\}$.

Trivial: $L_{[B]} \in \mathbf{NP}^B$

Bei Eingabe von 0^n rate $w \in \Sigma^n$ und teste mit Orakel B, ob $w \in B$.

Aufgabe: Konstruiere B so, dass $L_{[B]} \notin \mathbf{P}^B$.

—Hierzu $\Sigma = \{0, 1\}$.

—(M_n): Aufzählung aller deterministischen Orakel-TM mit Orakeln über Σ.

—Konstruiere B (und parallel dazu eine disjunkte Menge C) "stufenweise", sodass man mit "kurzen" Berechnungen keine Orakelanfragen $w \in B$ stellen kann.

—Wir konstruieren daher aufsteigende Mengenfolgen B_n, C_n mit $B = \bigcup B_n$ und $C = \bigcup C_n$.

Rekursive Stufenkonstruktion

Setze $B_0 = C_0 = \emptyset$.
Für $n > 0$ seien B_{n-1}, C_{n-1} bereits definiert.
Definiere B_n und C_n wie folgt:
—Simuliere M_n mit Orakel B_{n-1} auf 0^n für $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ Schritte. S_n sei die Menge der Orakelanfragen, die dabei gemacht wurde.
—Setze $C_n := C_{n-1} \cup S_n$.
—Falls M_n in $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ Schritten die Eingabe 0^n verwirft, wähle $y_n \in \{0,1\}^n \setminus C_n$ beliebig. Setze $B_n := B_{n-1} \cup \{y_n\}$.
—Falls M_n nicht hält oder akzeptiert, setze $B_n := B_{n-1}$.

Beobachte: Stufenkonstruktion läuft über alle Orakel-TM.

Eigenschaften der Stufenkonstruktion

—$|S_n| \leq 2^{n/2}$. Die Orakelanfragen müssen aufs Band geschrieben werden.

$\rightsquigarrow |C_n| = |\bigcup_{i=1}^{n} S_i| \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{i/2} < 2^n$.

$\rightsquigarrow$ Es kann stets ein y_n wie angegeben gefunden werden.

—Mit $B = \bigcup B_n$ und $C = \bigcup C_n$ gilt: $B \cap C = \emptyset$.

Wäre $L_{[B]} \in \mathbf{P}^B$, so würde $L_{[B]}$ z.B. von der det. Orakel-TM M_n mit Orakel B akzeptiert. O.E. (Warum?) wähle n so groß, dass 2^n größer als die (polynomielle) Rechenzeit von M_n auf 0^n ist.

$$
\begin{array}{lll}
0^n \in L_{[B]} & \Longleftrightarrow & \exists w \in B : |w| = n \\
& \Longleftrightarrow & \text{Es wurde auf } n\text{-ter Stufe gewählt: } y_n \in \{0,1\}^n \setminus C_n \\
& \Longleftrightarrow & M_n \text{ mit Orakel } B_{n-1} \text{ akzeptiert nicht } 0^n \\
& \Longleftrightarrow & M_n \text{ mit Orakel } B \text{ akzeptiert nicht } 0^n \\
& \rightsquigarrow & \text{Widerspruch}
\end{array}
$$

Anmerkungen

(1) Die Frage $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ kann nicht mit Hilfe von Orakel-Turingmaschinen gelöst werden.

(2) Es gibt keinen Beweis für $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ oder $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, der auf Orakel-Turingmaschinen übertragbar ist.

(3) $\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$ ist nicht zu Unrecht eine \$1 000 000 - Frage.

Sind $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei Komplexitätsklassen, bei denen $\mathcal{K}^{\mathrm{A}} = \mathcal{K}^{\mathrm{B}}$ für beliebige $\mathcal{K}'$-vollständige Probleme A, B gilt, so definieren wir

$$\mathcal{K}^{\mathcal{K}'} := \mathcal{K}^{\mathrm{A}}$$

Falls $\leq_{\log}$- bzw. $\leq_{\mathrm{p}}$-Reduktionen in der Klasse $\mathcal{K}$ möglich sind:
Definition von $\mathcal{K}^{\mathcal{K}'}$ vom konkreten vollständigen Problem A unabhängig!

Damit z.B. CHROMATIC NUMBER$\in \mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$,
zudem:

$$\mathbf{P}^{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{NP}^{\mathbf{P}} = \mathbf{NP}$$

Unbekannt:

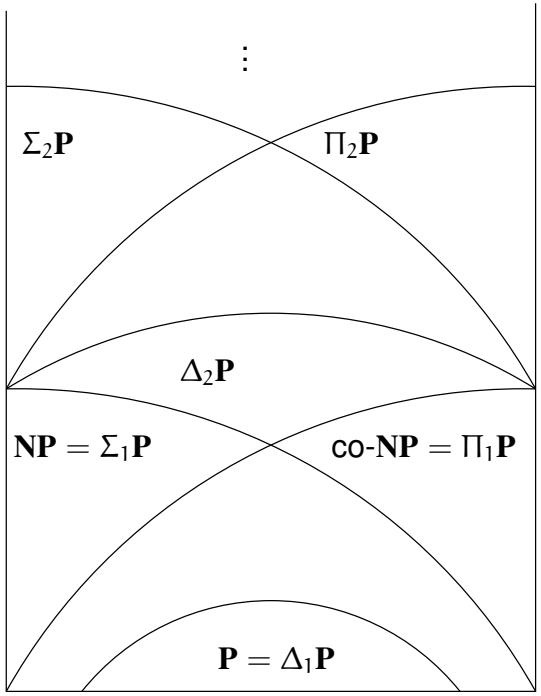
$$\mathbf{P}^{\mathbf{NP}} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$$

Die **Polynomialzeithierarchie** ist die folgende induktiv definierte Folge von Komplexitätsklassen:

- $\Delta_0\mathbf{P} := \Sigma_0\mathbf{P} := \Pi_0\mathbf{P} := \mathbf{P}$
- $\Delta_{i+1}\mathbf{P} := \mathbf{P}^{\Sigma_i\mathbf{P}}$
- $\Sigma_{i+1}\mathbf{P} := \mathbf{NP}^{\Sigma_i\mathbf{P}}$
- $\Pi_{i+1}\mathbf{P} := co - (\mathbf{NP}^{\Sigma_i\mathbf{P}})$

für beliebige $i > 0$. Zudem sei

$$\mathbf{PH} := \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i\mathbf{P}$$



Aufbau der Polynomialzeit-Hierarchie

Satz 3 *Für* $L \subseteq \Sigma^*$ *und* $i > 0$ *gilt*

$$L \in \Sigma_i \mathbf{P}$$

genau dann, wenn eine polynomial balancierte Relation R *existiert mit*

$$L = \{x \mid \exists y \;\; (x, y) \in R\}$$

und

$$\{x; y \mid (x, y) \in R\} \in \Pi_{i-1} \mathbf{P}$$

Aufbau der Polynomialzeit-Hierarchie; Beweisteil I

Für $i = 1$ ist die Aussage bereits bewiesen (siehe letzte Vorlesung), denn $\Sigma_1\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ und $\Pi_0\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

Wir betrachten dies als Induktionsanfang und diskutieren den Induktionsschritt $(i-1) \to i$:

$\Leftarrow$: Sei R gegeben; z.z.: für das zugehörige L muss gelten: $L \in \Sigma_i\mathbf{P}$.
Gesucht ist also nichtdet. TM M mit Orakel A aus $\Sigma_{i-1}\mathbf{P}$, die L akzeptiert.
Nach Vorauss.: $\{x;y \mid (x,y) \in R\} \in \Pi_{i-1}\mathbf{P}$ mit Balance $|y| \leq |x|^k$.
$\rightsquigarrow A := \{x;y \mid (x,y) \notin R, |y| \leq |x|^k\} \in \Sigma_{i-1}\mathbf{P}$
(*längenbeschränktes Komplement* von R).
Wähle dieses A als Orakel. Bei Eingabe x rät M ein y mit $|y| \leq |x|^k$ und überprüft (Orakelanfrage), ob $x;y \in A$. Falls $x;y \notin A$, akzeptiert M.
$\rightsquigarrow L \in \mathbf{NP}^{\Sigma_{i-1}\mathbf{P}} = \Sigma_i\mathbf{P}$.

Hilfsüberlegungen

Die Berechnung einer nichtdet. Orakel-TM M bei Eingabe x lässt sich mit zwei Hilfswörtern $s(x)$ und $o(x)$ (jeweils über $\{0,1\}$) charakterisieren:

—$s(x) = s_1 \dots s_{|s(x)|}$ steht für die Folge der nichtdeterministischen Auswahlen,

O.E. seien diese Auswahlen stets "binär".

—$o(x) = o_1 \dots o_{|o(x)|}$ steht für die Folge der Antworten des Orakels.

Per def. sind die Antworten auf Orakelanfragen binär.

Ist M polynomzeitbeschr., so gilt $|s(x)| \leq |x|^k$ und $|o(x)| \leq |x|^k$ für geeignetes k.

Das Prädikat: $P^1_M(x; s; o)$ ist in $\mathbf{P}$ berechenbar, wobei P^1_M bedeuten soll:
"M hält auf x bei Auswahlwort s und Orakelantworten o."

Aufbau der Polynomialzeit-Hierarchie; Beweisteil II

Für $i = 1$ ist die Aussage bereits bewiesen, denn $\Sigma_1\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ und $\Pi_0\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

Wir betrachten dies als Induktionsanfang und diskutieren den Induktionsschritt $(i-1) \to i$:

$\Rightarrow$: Sei $L \in \Sigma_i\mathbf{P} = \mathbf{NP}^{\Sigma_{i-1}\mathbf{P}}$.
$\rightsquigarrow \exists$ nichtdet. pol.zeitbeschränkte Orakel-TM M mit Orakel $A \in \Sigma_{i-1}\mathbf{P}$, die L akzeptiert.
Nach Induktionsannahme: $\exists$ polynomial balancierte Relation S (mit Balance k), sodass
(1) $\{x; y \mid (x, y) \in S\} \in \Pi_{i-2}\mathbf{P}$ und (2) $A = \{x \mid \exists y \ \ (x, y) \in S\}$.
Betrachte wieder "längenbeschr. Komplement": $S' := \{(x, y) \mid (x, y) \notin S, |y| \leq |x|^k\} \in \Sigma_{i-2}\mathbf{P}$.
Es gilt: $A = \{x \mid \forall y \ \ (x, y) \notin S'\}$.

$x \in L$ gdw. $(\exists s \in \{0,1\}^*, |s| \leq |x|^k)\ (\exists o \in \{0,1\}^*, |o| \leq |x|^k)$ mit (1) $P^1_M(x; s; o)$ und (2) Die Antworten von Orakel A bei der Berechnung auf x (mit s) stimmen mit o überein.

(2) bedeutet: $\neg\exists i \leq |o| \exists$ Orakelanfrage q_i (bei x und s): $o_i \neq$ "$q_i \overset{?}{\in} A$". Das heißt formaler:
$\neg\exists i \leq |o| \exists q_i((o_i \wedge (\exists y_1 : (q_i, y_1) \in S)) \vee (\neg o_i \wedge \neg(\exists y_2 : (q_i, y_2) \in S')))$.
$P^2_M(x; s; o) := (\exists i \leq |o| \exists q_i(P^1_M(x; s; o) \wedge (\exists y_1 : (o_i \wedge (q_i, y_1) \in S) \vee \neg\exists y_2 : o_i \wedge (q_i, y_2) \in S')))$
Definiere: $R := \{(x; s; o) \mid P^2_M(x; s; o), x \text{ Eingabe}, s, o \in \{0,1\}^*, |s| \leq |x|^k, |o| \leq |x|^k\}$.
$R \in \Sigma_{i-1}\mathbf{P}$, da dies für die einzelnen Formelbestandteile gilt.
$\rightsquigarrow$ längenbeschr. Komplement $R' \in \Pi_{i-1}\mathbf{P}$, $L = \{x \mid \exists s, o : (x; s; o) \in R'\}$.

Folgerung 4 *Für* $L \subseteq \Sigma^*$ *und* $i > 0$ *gilt:*

$$L \in \Pi_i \mathbf{P}$$

genau dann, wenn eine polynomial balancierte Relation R *(mit Balance* k*) existiert mit*

$$L = \{x \mid (\forall y, |y| \leq |x|^k) \ \ (x, y) \in R\}$$

und

$$\{x; y \mid (x, y) \in R\} \in \Sigma_{i-1} \mathbf{P}.$$

Folgerung 5 *Für* $L \subseteq \Sigma^*$ *und* $i > 0$ *gilt*

$$L \in \Sigma_i \mathbf{P}$$

genau dann, wenn eine polynomial balancierte und in polynomialer Zeit entscheidbare $(i+1)$*-stellige Relation* R *existiert mit*

$$L = \{x \mid (\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3) \ldots (Qy_i) \quad (x, y_1, y_2, \ldots y_i) \in R\}$$

Dabei ist $Q = \exists$ *bei ungeradem* i *und* $Q = \forall$ *bei geradem* i*.*

Diese Struktur entspricht voll-quantifizierten Formeln.
vgl. `3-QBF` s.u. im nachfolgenden Abschnitt über **PSPACE**

Man kann für jede "Ebene" der Polynomialzeit-Hierarchie vollständige `QBF`-Probleme bauen, indem die Quantorenalternierungen auf der entsprechenden Ebene abbrechen.

Damit gilt auch:

Folgerung 6 $\mathbf{PH} \subseteq \mathbf{PSPACE}$*.*

Frage $\mathbf{NP} = \mathrm{co}-\mathbf{NP}$? taucht auf jeder Stufe der Hierarchie auf:

Satz 7 *Gilt für ein* $i \geq 1$ $\Sigma_i\mathbf{P} = \Pi_i\mathbf{P}$*, so gilt auch für alle* $j > i$

$$\Sigma_j\mathbf{P} = \Pi_j\mathbf{P} = \Delta_j\mathbf{P} = \Sigma_i\mathbf{P},$$

d.h. die Polynomialzeit-Hierarchie kollabiert dann auf i*-ter Stufe.*

Satz 8 *Gilt* $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ *oder* $\mathbf{NP} = \mathrm{co}-\mathbf{NP}$*, so kollabiert die Polynomialzeit-Hierarchie bereits auf Ebene 1.*

Satz 9 *Gibt es ein* $\mathbf{PH}$*-vollständiges Problem, so kollabiert die Hierarchie auf endlicher Stufe.*

(Ohne Beweis)

Mehr Orakel

In unserem bisherigen Orakelmodell durften beliebig viele Orakelanfragen hintereinander gestellt wurden.

Vgl.: Turing-Reduktionen vs. many-one Reduktionen vs. andere Reduktionsmodelle.

Darf die TM nur einmal, aber dann evtl. mehrere parallele Anfragen stellen, gelangt man zu Komplexitätsklassen wie $\mathbf{P}_{\|}^{\mathbf{NP}}$, auch $\mathbf{P}_{\mathrm{tt}}^{\mathbf{NP}}$ aus logischer Sichtweise genannt.

Man kann auch z.B. nur logarithmisch viele Anfragen hintereinander zulassen: $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}[\log]}$.

Satz 10 $\mathbf{P}_{\|}^{\mathbf{NP}} = \mathbf{P}_{\mathrm{tt}}^{\mathbf{NP}} = \mathbf{P}^{\mathbf{NP}[\log]} = \mathbf{L}^{\mathbf{NP}}$. *(ohne Beweis)*

Beispiel für ein $\mathbf{L}^{\mathbf{NP}}$-vollständiges Problem: `VERTEX COVER MEMBER`:

Eingabe: unger. Graph $G = (V, E)$, Knoten v;

Frage: Gibt es eine kleinstmögliche Knotenüberdeckung von G, die v enthält ?