Lernalgorithmen

SoSe 2008 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Lernalgorithmen Gesamtübersicht

0. Einführung

1. Identifikation (aus positiven Beispielen)

2. Zur Identifikation regulärer Sprachen, mit XML-Anwendung

3. HMM — Hidden Markov Models

4. Lernen mittels Anfragen & zur Roboterorientierung

5. Lernen mit negativen Beispielen

6. PAC-Lernen

Organisatorisches

Vorlesung MO 8.25-9.55, F55

Publikum Hauptdiplomsstudierende und Masterstudierende

Übungsbetrieb in Form von einer “Großen Übungsgruppe”
MI 8.25-9.55, F55; BEGINN: in der zweiten Semesterwoche

Dozentensprechstunde DO, 13-14 in meinem Büro H 410 (4. Stock)

Mitarbeitersprechstunde (Stefan Gulan) DO 13-14 H 413

Scheinkriterien Es wird ein benoteter Schein vergeben nach einer mündlichen Prüfung.

Identifikation (aus positiven Beispielen): Literatur:

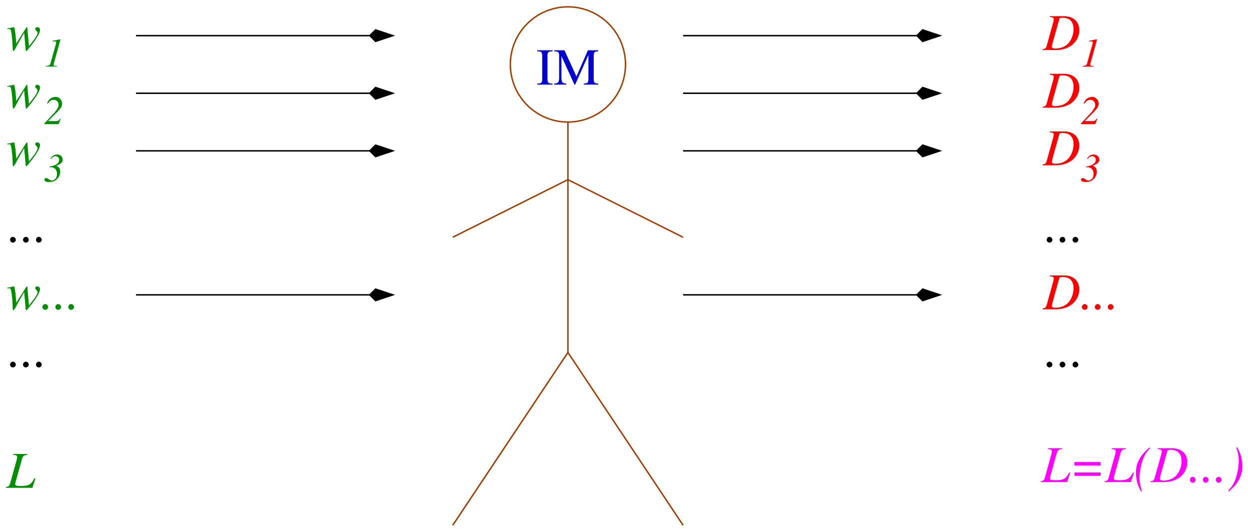
E.M. Gold. Language identification in the limit. *Information and Control* 10 (1967), pp. 447–474.

L. Blum, M. Blum. Toward a mathematical theory of inductive inference. *Information and Control* 28 (1975), pp. 125–155.

D. Angluin. Inductive inference of formal languages from positive data. *Information and Control* 45 (1980), pp. 117–135.

S. Jain, D. Osherson, J. S. Royer, A. Sharma. Systems that learn. 2. Auflage, MIT Press, 1999.

Golds Lernmodell des Textlernens



Mögliche Welten: Die Menge $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ der aufzählbaren “Sprachen”.

Zur Darstellung von *Beispielströmen*:
Ein *Text* sei irgendeine Abbildung $T : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \cup \{\#\}$.
#: *Pausenzeichen*
Der *Inhalt* von T: $\mathrm{Inh}(T) = \{T(i) | i \in \mathbb{N}, T(i) \neq \#\}$.
T heißt *Text für* $L \subset \mathbb{N}$, falls $\mathrm{Inh}(T) = L$.

Hinweis: Für jede nicht-leere Sprache gibt es unendlich viele Texte, denn
(1) die Anordnung ist beliebig, (2) Wiederholungen sind zulässig, und
(3) # kann beliebig eingefügt werden.
Ein Text modelliere den Beispielstrom (aus der “gewählten” Sprache $L \in \mathcal{E}$) in den Lerner, der seine *Hypothesen* in Form von Turingmaschinen oder Programmen äußern kann.

Setze $T[n] = (T(0), \ldots, T(n-1))$.
$SEQ = \{T[n] | T \text{ Text}, n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller endlichen Folgen über $\mathbb{N} \cup \{\#\}$.

Die *Länge* von $\sigma \in SEQ$ werde mit $|\sigma|$ bezeichnet.
Bem.: T beginnt mit σ genau dann, wenn $T[|\sigma|] = \sigma$.

Bem.: $T[n]$ ist die Datenmenge, die den Lerner bis zum n-ten Zeitpunkt zur Verfügung steht.

Gehen wir von einer fixierten Nummerierung aller Turingmaschinen aus, so können wir einen *Lerner*, auch *Inferenzmaschine (IM)* genannt, als (zunächst beliebige) partielle Funktion $F : SEQ \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ verstehen.
Notation: $F(T[n]) \downarrow$: F ist definert auf $T[n]$, das heißt, der Lerner äußert eine Hypothese nach Beobachtung von $(T(0), \ldots, T(n-1))$.
Zugehörige Sprache: $L(F(T[n]))$.

F *konvergiert* auf Text T, falls es einen *Grenzwert* $i \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : F(T[n]) = i$.
In Zeichen: $F(T) \downarrow= i$.

F *identifiziert* Text T genau dann, wenn
$\exists i \in \mathbb{N} : F(T) \downarrow= i \wedge L(i) = Inh(T)$.

F *identifiziert* $L \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn
$\forall$ Texte $T : Inh(T) = L \Rightarrow F$ identifiziert T.

F *identifiziert* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ genau dann, wenn
$\forall L \in \mathcal{L}$: F identifiziert L.
(sonst heißt $\mathcal{L}$ *nicht identifizierbar*.)
Anstelle von *Identifikation* spricht man auch vom *Textlernen*.

Die *Konkatenation* von $\sigma, \ \tau \in SEQ$ notieren wir durch Hintereinanderschreiben.
$\sigma \sqsubseteq \tau$ ($\sigma \sqsubset \tau$) drücke die (echte) *Präfixrelation* aus.
Gilt $\sigma_0 \sqsubseteq \sigma_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq \sigma_n \sqsubseteq \ldots$, so bezeichne $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$ den dadurch eindeutig festgelegten Text.

Es seien $L \in \mathcal{E}$, ein Lerner F und $\sigma \in SEQ$ gegeben.
σ heißt *Schlussfolge* (locking sequence) für F auf L genau dann, wenn

(a) $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L$,

(b) $L(F(\sigma)) = L$,

(c) $\forall \tau \in SEQ, \mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L \Rightarrow F(\sigma\tau) = F(\sigma)$.

Satz: (Blum & Blum) Identifiziert F eine Sprache $L \in \mathcal{E}$, so gibt es eine Schlussfolge für F auf L.

Beweis: Gegeben: $L \in \mathcal{E}$ und F. O.E. sei F auf ganz SEQ definiert.
Annahme: Es gibt keine Schlussfolge σ für F auf L. D.h.:

$$
\begin{aligned}
& \forall \sigma \in SEQ,\ \mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L \ \wedge\ L(F(\sigma)) = L \\
\Longrightarrow \quad & \exists \tau \in SEQ:\ \mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L \wedge F(\sigma\tau) \neq F(\sigma). \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Wir zeigen: Aus $(*)$ folgt die Existenz eines nicht identifizierbaren Textes T für L.
Es sei $U = u(0), u(1), u(2), \ldots$ ein beliebiger Text für L.
Wir definieren induktiv eine Folge $\sigma_n \sqsubset T$.

$n = 0 : \sigma_0 = \emptyset$.

$n \to n + 1$:

1. Fall: $L(F(\sigma_n)) \neq L$. Setze $\sigma_{n+1} = \sigma_n u(n)$.

2. Fall: $L(F(\sigma_n)) = L$.

$(*)$ gewährleistet die Existenz von $\tau \in SEQ$, $Inh(\tau) \subseteq L$, $F(\sigma_n \tau) \neq F(\sigma_n)$.

Setze $\sigma_{n+1} = \sigma_n \tau u(n)$.

Es ist $\sigma_i \sqsubseteq \sigma_{i+1}$ für alle i; setze daher $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$.

Da U ein Text für L ist, ist auch T ein Text für L.

F konvergiert aber nicht auf T, denn für alle $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist

entweder $L(\sigma_n) \neq L$

oder es gibt ein $\tau \in SEQ$, $\sigma_n \tau \sqsubseteq \sigma_{n+1}$, $F(\sigma_n \tau) \neq F(\sigma_n)$. $\square$

Satz: (Angluin) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ ist identifizierbar genau dann, wenn
$\forall L \in \mathcal{L} \exists D_L \subseteq L, |D_L| < \infty \ \forall L' \in \mathcal{L}, \ D_L \subseteq L' \Rightarrow L' \not\subset L$.

Obiges D_L heißt auch *charakteristische (Teil-)Menge* von L.

Beweis: Es sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ gegeben.
(1) Angenommen, F identifiziert $\mathcal{L}$.
Dann gibt es zu jedem $L \in \mathcal{L}$ eine Schlussfolge σ_L für F auf L.
Setze $D_L = \mathrm{Inh}(\sigma_L)$.
Zu zeigen: $\forall L' \in \mathcal{L}, D_L \subseteq L' \Rightarrow L' \not\subset L$.
Betrachte die Situation $D_L \subseteq L'$, $L' \subseteq L$ für zwei $L, L' \in \mathcal{L}$.
Es sei T ein Text <u>für L'</u> mit $T[|\sigma_L|] = \sigma_L$ (wegen $\mathrm{Inh}(\sigma_L) \subseteq L'$).
Da σ_L Schlussfolge, gilt: $L(F(\sigma_L)) = L$, also $L' = L(F(T)) = L$.

(2) <u>Annahme</u>: $\forall L \in \mathcal{L} \exists D_L \subseteq L(|D_L| < \infty) \forall L' \in \mathcal{L}, D_L \subseteq L' \Rightarrow L' \not\subset L$. [+]
Definiere einen Lerner F' wie folgt:
$F'(\sigma)$ sei das kleinste $i \in \mathbb{N}$, so dass für ein $L \in \mathcal{L}$ gilt:
(a) $L(i) = L$,
(b) $D_L \subseteq Inh(\sigma) \subseteq L$.
Gibt es solch ein i nicht, so sei F' undefiniert.
Zu zeigen: F' identifiziert $\mathcal{L}$.
Wir fixieren $L' \in \mathcal{L}$ und einen Text T für L'.
Es gibt dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $D_{L'} \subseteq Inh(T[n_0]) \subseteq L'$.
Sei i_0 der kleinste Index für L'. Nach Konstruktion von F' gilt:
F' konvergiert gegen i_0 auf T (und identifiziert so T), falls:
$\forall j < i_0, L = L(j) \in \mathcal{L} \forall m \in \mathbb{N}, D_L \subseteq Inh(T[m]) \exists n' > m \forall n \geq n' : Inh(T[n]) \not\subseteq L$.
Sei also $j < i_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gegeben mit $L = L(j) \in \mathcal{L}, D_L \subseteq Inh(T[m])$.
Wegen $L \neq L'$ und $D_L \subseteq Inh(T) = L'$ gibt es wegen [+] ein $x_0 \in L' \setminus L$.
T ist ein Text für L', so dass es ein n' gibt mit $x_0 \in Inh(T[n])$ für alle $n \geq n'$.
Daher ist $Inh(T[n]) \not\subseteq L$. □

Grenzen des Textlernens

Eine Sprachklasse, die alle endlichen sowie eine unendliche Sprache enthält, heißt *superfinit*.

Folgerung: (Gold) Keine superfinite Sprachklasse ist identifizierbar.

Folgerung: Die Klasse der regulären Sprachen ist nicht identifizierbar.

Warum sind dies einfache Folgerungen ?

Hinweis: Im ersten Fall: Wähle als $\mathbb{L}$ vom Satz von Angluin eine unendliche Sprache.

Rekursive Identifizierbarkeit (Lerner sind TM)

Satz: Es gibt eine identifizierbare, aber nicht rekursiv-identifizierbare Sprachfamilie.

Beweis: Es sei $K = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{die } n\text{-te TM hält, angesetzt auf } n \}$.
K kodiert das Halteproblem für Turingmaschinen und ist bekanntermaßen rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.
Betrachte $\mathcal{K} = \{ K \cup \{x\} \mid x \in \mathbb{N} \}$.
$\mathcal{K}$ ist identifizierbar durch

$$F(\sigma) = \begin{cases} \text{Index von } K\text{, falls } \mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq K, \\ \text{Index von } K \cup \{x\}\text{, falls } \exists x \notin K,\ x \in \mathrm{Inh}(\sigma). \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ nicht rekursiv identifizierbar ist.
Angenommen, ein berechenbarer Lerner F identifiziert $\mathcal{K}$.
Dann gibt es eine Schlussfolge σ_K für F auf $K \in \mathcal{K}$.
Fixiere eine berechenbare Aufzählung $y_0, y_1, y_2, \ldots$ von K.
Für jedes $x \in \mathbb{N}$ bezeichne T^x den Text $\sigma_K x y_0 y_1 y_2 \ldots$.

Es gilt:
(a) $\forall x \in K: \; T^x$ ist Text für K.
(b) $\forall x \in \overline{K}: \; T^x$ ist Text für $K \cup \{x\} \neq K$.
Also: Nur Texte "für" $\mathcal{K}$!
Aus (a) folgt (denn σ_K ist Schlussfolge für K):
$\forall x \in K \forall n > |\sigma_K| : F(T^x[n]) = F(\sigma_K)$.
Aus (b) folgt (denn F identifiziert $\mathcal{K}$):
$\forall x \in \overline{K} \exists n > |\sigma_K| : F(T^x[n]) \downarrow \wedge F(T^x[n]) \neq F(\sigma_K)$.
Wäre F eine (partiell) rekursive Funktion, so auch

$$\chi : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}, \; \chi(x) = \begin{cases} \min\{S(n) \mid n > |\sigma_K| \wedge F(T^x[n]) \neq F(\sigma_K)\}, & \text{falls def.!} \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei: $S(n)$ sei Schrittzahl einer F realisierenden TM bei Eingabe von $T^x[n]$.
Der Definitionsbereich von χ wäre $\overline{K}$, d.h., $\overline{K}$ wäre rekursiv aufzählbar. Widerspruch! $\square$

Satz: : Es sei $F^0, F^1, \ldots$ eine Aufzählung aller Turing-berechenbaren (möglicherweise partiellen) Lerner.
Dann gibt es eine total-rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass
(a) $F^{f(i)}$ total ist und
(b) $\forall L \in \mathcal{E}$: falls F^i identifiziert L, dann gilt: $F^{f(i)}$ identifiziert L.

Beweis: $F^{f(i)}$ soll F^i simulieren, aber definiert sein auf σ, falls $F^i(\sigma) \uparrow$. Es sei $\sigma_{f(i)}$ der längste Präfix von $\sigma \in SEQ$ (falls dieser existiert), auf dem F^i nach $|\sigma|$ Schritten fertig ist.

$$F^{f(i)}(\sigma) = \begin{cases} F^i(\sigma_{f(i)}), & \text{falls } \sigma_{f(i)} \text{ definiert ist.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei T ein Text für L, und F^i identifiziere L, d.h., es gibt ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ $F^i(T[n]) = F^i(T[n_0])$ ein Index für L ist.
Sei s die Laufzeit zur Berechnung von $F^i(T[n_0])$.
$\forall n \geq \max\{n_0, s\} :\ F^{f(i)}(T[n]) = F^i(T[n_0])$, das heißt:
$F^{f(i)}$ konvergiert auf T gegen einen Index von L. □

Weitere Begriffe Speicherbeschränkte Lerner

Wir setzen:

$\sigma^- = \emptyset$, falls $\sigma = \emptyset$,

und $\sigma^- = (\sigma(0), \ldots, \sigma(|\sigma| - 2))$, falls $\sigma \in SEQ \setminus \{\emptyset\}$;

$\sigma_{last} = \#$, falls $\sigma = \emptyset$,

und $\sigma_{last} = \sigma(|\sigma| - 1)$, falls $\sigma \in SEQ \setminus \{\emptyset\}$.

Ein Lerner F heißt *speicherbeschränkt*, falls

$\forall \sigma, \tau \in SEQ\ F(\sigma^-) = F(\tau^-) \wedge \sigma_{last} = \tau_{last} \Rightarrow F(\sigma) = F(\tau)$.

Mitteilung: Es gibt ein $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$, $\mathcal{L}$ identifizierbar, aber nicht speicherbeschränkt identifizierbar.

$\boxed{\textbf{Weitere Begriffe}}$ **Fette Texte**

Ein Text T heißt *fett*, falls
$\forall i \in Inh(T) : |\{ n \mid T(n) = i \}| = \infty.$

Mitteilung: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ ist genau dann identifizierbar, wenn $\mathcal{L}$ von einem speicherbeschränkten Lerner auf fetten Text identifiziert werden kann.

Weitere Begriffe Konsistente Lerner

Ein Lerner heißt *konsistent* auf L, falls $\forall\sigma, \mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L \Rightarrow \mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L(F(\sigma))$.

Satz: Jede konsistent rekursiv-identifizierbare Sprachfamilie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ enthält nur rekursive Sprachen.

Beweis: Es sei σ eine Schlussfolge für $L \in \mathcal{L}$.

Ist $x \in L$, so gilt $F(\sigma) = F(\sigma x)$.

Ist $x \notin L$, so ist wegen der Konsistenz von F $F(\sigma x)$ kein Index von L, da sonst $\mathrm{Inh}(\sigma x) \not\subseteq L(F(\sigma x)) = L$ wäre; also ist $F(\sigma x) \neq F(\sigma)$.

Daher gilt: $x \in L$ genau dann, wenn $F(\sigma x) = F(\sigma)$.

F total rekursiv $\leadsto$ Entscheidungsverfahren für L. $\square$

Da $\{\mathcal{K}\}$ trivial rekursiv identifizierbar ist, ist Konsistenz folglich eine echte Einschränkung. Es gilt sogar stärker:

Mitteilung: Es gibt auch $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$, die nur rekursive Sprachen enthalten, die rekursiv identifizierbar aber nicht konsistent rekursiv-identifizierbar sind.

Weitere Begriffe **Konservative Lerner**

Ein Lerner F heißt *konservativ* auf L genau dann, wenn $\forall\sigma \sqsubseteq \tau, \mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L \cap L(F(\sigma)) \Rightarrow F(\sigma) = F(\tau)$.

Mitteilung: Auch die Einschränkung auf konservative Lerner verkleinert die Familie der so rekursiv-identifizierbaren Sprachen.

$\boxed{\text{Weitere Begriffe}}$ Kleine Fehler

L heißt *endliche Variante* von L' genau dann, wenn die symmetrische Differenz $\mathrm{L} \triangle \mathrm{L}' = \mathrm{L} \setminus \mathrm{L}' \cup \mathrm{L}' \setminus \mathrm{L}$ endlich ist.
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ *überdeckt* $\mathcal{E}$ genau dann,
wenn $\forall \mathrm{L} \in \mathcal{E}\, \exists \mathrm{L}' \in \mathcal{L}$: L' ist endliche Variante von L.

Mitteilung: (Wiehagen): Es gibt eine rekursiv-identifizierbare Sprachfamilie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$, die $\mathcal{E}$ überdeckt.

Weitere Begriffe **Strenge Annäherung**

Fixiere eine Grammatikklasse $\mathcal{G}$. Eine Grammatik $G \in \mathcal{G}$ wird *streng angenähert*, wenn für die Hypothesenfolge $(G_t)_{t \in \mathbb{N}}$ zu jeder beliebigen Aufzählung von $L(G)$ gilt:

1. $\forall w \in L(G) \exists t_0 \in \mathbb{N} \forall t > t_0 : w \in L(G_t)$,

2. $\forall H \in \mathcal{G}, L(H) \setminus L(G) \neq \emptyset \exists t_0 \in \mathbb{N} \forall t > t_0 : G_t \neq H$ und

3. $\exists t_1 : L(G) = L(G_{t_1}) \wedge |\{ t_j \mid G_{t_j} = G_{t_1} \}| = \infty$.

Mitteilung: (Feldman) Jede rekursive Grammatikklasse kann durch einen rekursiven Lerner streng angenähert werden.

Lernen von Funktionen

Texte enthalten Paare (x, y), $x, y \in \mathbb{N}$, so dass in jedem Text G zu jedem $x \in \mathbb{N}$ genau ein $y \in \mathbb{N}$ erscheint, d.h. $(x, y) \in \mathrm{Inh}(G)$.
G ist also ein Text für den Graph einer totalen Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
$\mathcal{S}EG$: die Menge aller endlichen Präfixe von Texten für Funktionen.
Den Begriff des Lernens im Limes kann man leicht auf Funktionen übertragen.

Satz: Die Menge $\mathcal{R}$ der total-rekursiven Funktionen ist identifizierbar.

Beweis: Für $\sigma \in \mathcal{S}EG$ sei $F(\sigma)$ der kleinste Index i einer totalen rekursiven Funktion φ_i mit $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq \mathrm{Graph}(\varphi_i)$.
Da für alle $f, g \in \mathcal{R}$, $f \neq g$ es "Zeugen" in $x, y, z \in \mathbb{N}$ gibt mit $(x, y) \in \mathrm{Graph}(f)$ und $(x, z) \in \mathrm{Graph}(g)$, $y \neq z$, folgt die Limeslerneigenschaft von F. $\square$

Mitteilung: (Gold) $\mathcal{R}$ ist nicht rekursiv-identifizierbar.