Lernalgorithmen

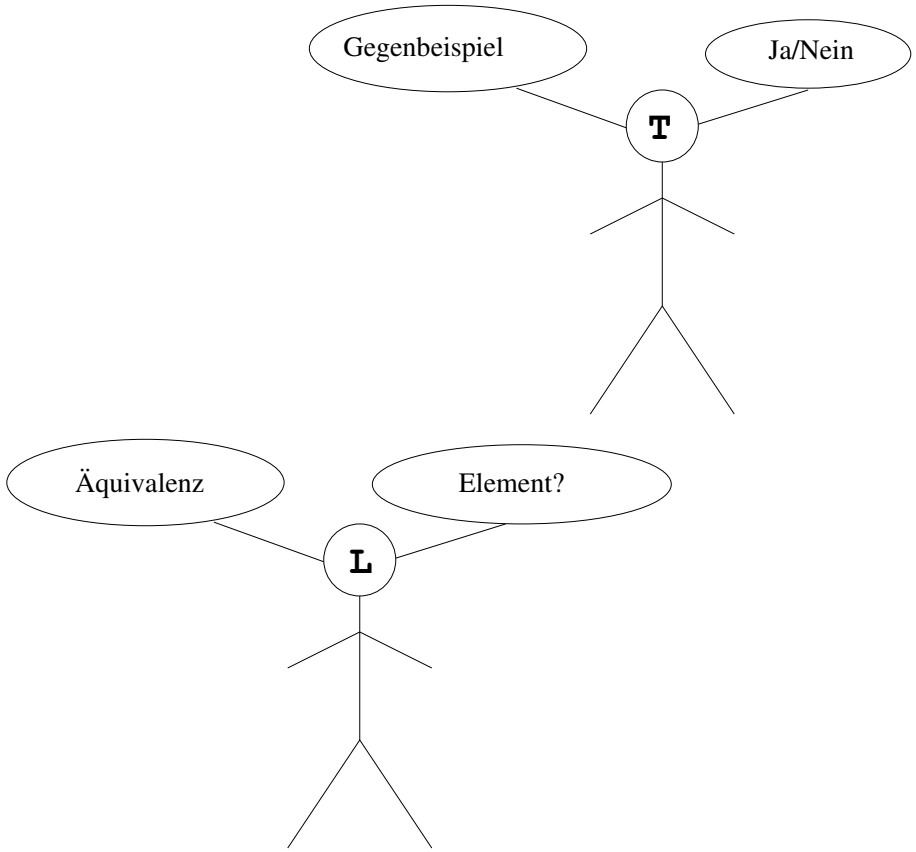
SoSe 2010 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Lernalgorithmen Gesamtübersicht

0. Einführung
1. Identifikation (aus positiven Beispielen)
2. Zur Identifikation regulärer Sprachen, mit XML-Anwendung
3. HMM — Hidden Markov Models
4. Lernen mittels Anfragen & zur Roboterorientierung
5. Lernen mit negativen Beispielen
6. PAC-Lernen

Schema des Anfrage-Lernens



Polynomialzeitlernen mit einem Lehrer

"minimally adequate teacher" MAT Modell

Anfragetypen

Im Bereich des Lernens regulärer Sprachen und ähnlicher Objekte sind hauptsächlich folgende Typen von Anfragen betrachtet worden:

Elementanfragen: Ist $x \in L$?

Antwort: "Ja" oder "Nein".

Äquivalenzanfragen: Erzeugt der Automat M die Sprache L?

Antwort: "Ja" oder ein Gegenbeispiel x, auf dem M einen Fehler macht.

Teilmengenanfragen: Erzeugt M eine Teil-/Ober-Menge von L?

Antwort: "Ja" oder "Nein".

Gegenbeispiele sind notwendig bei Äquivalenzanfragen

Sonst: exponentiell viele Anfragen möglich!

Um eine Sprache der Form $\{x\}$ zu lernen (die von einem endlichen Automaten mit $|x| + 1$ Zuständen erkannt wird), müssen ggf. alle Strings y der Länge $|x|$ durchprobiert werden;
das heißt: der Lernalgorithmus muss fragen, ob $y \in L$ ist (oder ob $L = \{y\}$ ist).
Dieser Aufwand ist exponentionell.
Umgekehrt genügt aber auch ein exponentioneller Aufwand:
Der Lernalgorithmus erzeugt in der Reihenfolge ihrer Größe alle endlichen Automaten und stellt Äquivalenzanfragen.

Eie polynomiale Zeitbeschränkung ist so die wesentliche Hürde beim Algorithmenentwurf.

Literatur

D. Angluin. Learning regular sets from queries and counterexamples. *Information and Control* 75 (1987), pp. 87–106.

R. L. Rivest und R. E. Schapire. Inference of finite automata using homing sequences. *Information and Control* 103 (1993), pp. 299–347.

H. Fernau und J. M. Sempere. Permutations and control sets for learning non-regular language families. IN: *Proceedings of the International Conference on Grammatical Inference ICGI 2000*.

Vergleiche auch das entsprechende Kapitel von Frank Stephans Skriptum.

Anfrage-Lernen von regulären Sprachen

Satz: [Angluin] Es gibt einen Algorithmus (genannt L^*),
der jeden unbekannten, endlichen Automaten M der Größe n
in Zeit $\mathrm{p}(\mathrm{n}, \mathrm{m})$
mittels Äquivalenzanfragen und Elementanfragen
einen Automaten N lernt, der zu M äquivalent ist.
Dabei ist p ein Polynom und m die größte Länge eines Gegenbeispiels.

Hilfsdefinitionen und -aussagen

Der Algorithmus L^* braucht eine spezielle Datenstruktur:
Die Beobachtungstabelle (S, E, T) ist gegeben wie folgt:
E (*Experimente*) ist eine endliche, unter Suffixbildung abgeschlossene Menge von Wörtern, d.h.: $\forall te \in E : e \in E$.
S (*potentielle Zustände*) ist eine endliche, unter Präfixbildung abgeschlossene Menge von Wörtern, d.h.: $\forall st \in S : s \in S$.
T ist eine endliche Funktion $T : S \cdot (\Sigma \cup \{\lambda\}) \cdot E \to \{0, 1\}$, die für jedes $s \cdot t \cdot e \in S \cdot (\Sigma \cup \{\lambda\}) \cdot E$ speichert, ob der gesuchte Automat M die Eingabe ste akzeptiert oder nicht.
Bezeichnung: $row(s) = \{(e, T(se)) \mid e \in E\}$.
(S, E, T) heißt *konsistent*, wenn:
$\forall s_1, s_2 \in S \forall a \in \Sigma : row(s_1) = row(s_2) \rightsquigarrow row(s_1 a) = row(s_2 a)$.
(S, E, T) ist *geschlossen*, wenn:
$\forall s_1 \in S \forall a \in \Sigma \exists s_2 \in S : row(s_2) = row(s_1 a)$.

T_4	λ	a
λ	1	0
a	0	1
b	0	0
bb	1	0
aa	1	0
ab	0	0
ba	0	0
bba	0	1
bbb	0	0

Automaten aus Beobachtungstabellen

Zu jeder konsistenten und geschlossenen Tabelle (S, E, T) definiert man den Automaten $M(S, E, T)$ wie folgt:

Zustandsmenge ist $Q = \{row(s) \mid s \in S\}$.
Startzustand ist $q_0 = row(\lambda)$.
Akzeptierende Zustände F sind alle $row(s)$ mit $T(s) = 1$.
Übergangsfunktion δ: $\delta(row(s), a) = row(sa)$.

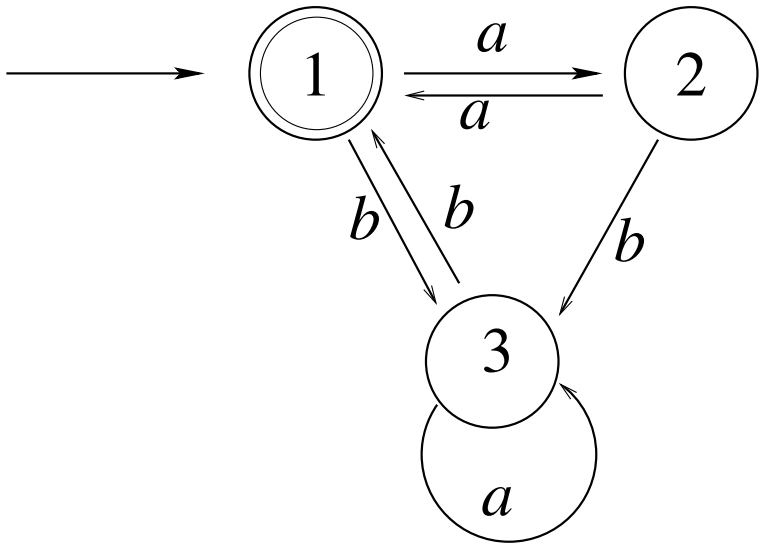
Die Übergangsfunktion ist wohldefiniert:
Sind $s_1, s_2 \in S$ mit $row(s_1) = row(s_2)$, so gilt für jedes $a \in \Sigma$ wegen der Konsistenz der Beobachtungstabelle $row(s_1a) = row(s_2a)$, und da die Tabelle geschlossen ist, ist $row(s_1a) = row(s)$ für ein $s \in S$.

Durch Induktion über die Länge der Eingaben lässt sich zeigen:
Lemma: Für jeden Automaten $M(S, E, T)$ einer geschlossenen konsistenten Beobachtungstabelle (S, E, T) gilt: Ist s aus $S \cup S\Sigma$, so gilt $\delta^*(q_0, s) = row(s)$.

Ein Beispiel

T_4	λ	a
λ	1	0
a	0	1
b	0	0
bb	1	0
aa	1	0
ab	0	0
ba	0	0
bba	0	1
bbb	0	0

T_4 entspricht der Automat:



Lemma: Für jeden Automaten $M(S, E, T)$ einer geschlossenen konsistenten Beobachtungstabelle (S, E, T) gilt: $M(S, E, T)$ ist konsistent mit T, d.h., ist s aus $S \cup S\Sigma$ und e aus E, so ist $se \in L(M(S, E, T))$ genau dann, wenn $T(se) = 1$.

BEWEIS. Wir zeigen das Lemma durch Induktion über die Länge von e.
Ist $e = \lambda$ und $s \in (S \cup S\Sigma)$, so gilt $\delta^*(q_0, se) = row(s)$ mit dem voranstehenden Lemma.
Liegt $s \in S$, so: $row(s)$ Endzustand $\iff T(s) = 1$.
Liegt $s \in S\Sigma$, so: $\exists s' \in S : row(s) = row(s')$, denn die Beobachtungstabelle ist geschlossen.
$row(s) = row(s')$ ist Endzustand $\iff T(s') = 1 \iff T(s) = 1$.
IV: Die Behauptung gilt für alle $e \in E$ der Länge höchstens k.
Betrachte ein $e \in E$ der Länge $k + 1$.
Da E suffixabgeschlossen ist, gilt $e = ae'$ für einen Buchstaben a und ein $e' \in E$.

Sei s ferner ein beliebiges Element aus $S \cup S\Sigma$.

Da die Beobachtungstabelle geschlossen ist, gibt es ein $s' \in S$ mit $row(s) = row(s')$. $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, se) &= \delta^*(\delta^*(q_0, s), ae') \\
&= \delta^*(row(s), ae') && \text{wegen des vorigen Lemmas} \\
&= \delta^*(row(s'), ae') && \text{denn } row(s) = row(s') \\
&= \delta^*(\delta(row(s'), a), e') \\
&= \delta^*(row(s'a), e') && \text{per def. von } \delta \\
&= \delta^*(\delta^*(q_0, s'a), e') && \text{wegen des vorigen Lemmas} \\
&= \delta^*(q_0, s'ae').
\end{aligned}
$$

Wir können IV auf e' anwenden:

$\delta^*(q_0, s'ae')$ ist ein Endzustand genau dann, wenn $T(s'ae') = 1$ ist.

Wegen $row(s') = row(s)$ und $ae' = e \in E$ gilt $T(s'ae') = T(sae') = T(se)$.

Also ist $\delta^*(q_0, se)$ Endzustand genau dann, wenn $T(se) = 1$. $\square$

Lemma: Für jeden Automaten $M(S, E, T)$ einer geschlossenen konsistenten Beobachtungstabelle (S, E, T) gilt: Jeder mit T konsistente DEA $M' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ mit mit höchstens soviel Zuständen wie $M(S, E, T)$ ist isomorph zu $M(S, E, T)$.

BEWEIS. Wir konstruieren solch einen Isomorphismus:
Definiere $row : Q' \times E \to \{0, 1\}$ mit $row(q')(e) = 1 \Leftrightarrow \delta'^*(q', e) \in F'$.
Da M' konsistent mit T ist, gilt:
$\forall s \in (S \cup S\Sigma)\forall e \in E : \delta'^*(q_0, se) \in F' \Leftrightarrow T(se) = 1$.
$\rightsquigarrow \delta'^*(\delta'^*(q_0, s), e) \in F' \iff T(se) = 1$,
d.h., $row(\delta'^*(q_0, s))$ ist gleich $row(s)$ in $M(S, E, T)$.
Da $s \in S$ beliebig, ist $\{row(\delta'^*(q_0, s)) \mid s \in S\} \supseteq Q$.
Also hat M' genauso viele Zustände wie $M(S, E, T)$.
Es gibt daher eine Funktion ϕ, die jedem $row(s) \in Q$ in eindeutiger Weise ein $q' \in Q'$ zuordnet mit $row(s) = row(q')$;
setze nämlich $\phi(row(s)) = \delta'^*(q_0', s)$. ϕ is bijektiv.

Wir müssen noch zeigen: Automatenstrukturerhaltung.
Anfangszustand: $\phi(q_0) = \phi(row(\lambda)) = \delta'^*(q'_0, \lambda) = q'_0$.
Endzustände: z.z.: $\phi(F) = F'$.
Liegt $row(s)$ in F, so gilt $T(s) = 1$;
also $\phi(row(s)) \in F'$ wegen $row(\phi(row(s))) = row(s)$.
Liegt $\phi(row(s)) \in F'$, so $T(s) = 1$, d.h., $row(\phi(row(s))) = row(s) \in F$.
Als Übungsaufgabe zeige man, dass für alle $s \in S$ und Zeichen $a \in \Sigma$ gilt: $\phi(\delta^*(row(s), a)) = \delta'^*(\phi(row(s)), a)$.
Dabei benutze man, dass man o.E. voraussetzen kann, dass aus $row(q') = row(p')$ für zwei Zustände $q', p' \in Q'$ ihre Gleichheit folgt. □

Satz: Es sei (S, E, T) eine konsistente geschlossene Beobachtungstabelle. Dann ist $M(S, E, T)$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte kleinste DEA (Minimalautomat), der konsistent mit T ist.

Beweis des Satzes von Angluin: Der *Lernalgorithmus* L^*:

Initialisiere $S = \{\lambda\}$ und $E = \{\lambda\}$.

(1) % Beginn Schleife 1, um M zu lernen.

(2) % Mache (S, E, T) konsistent und geschlossen:

Solange T auf einem $t \in S \cdot (\Sigma \cup \{\lambda\}) \cdot E$ undefiniert,

bestimme $T(t)$ mittels einer *Elementanfrage* bei t.

Wenn (S, E, T) nicht konsistent ist,

dann finde $s_1, s_2 \in S$, $a \in \Sigma$ und $e \in E$ mit $row(s_1) = row(s_2) \wedge T(s_1ae) \neq T(s_2ae)$;

addiere ae zu E und gehe zu (2).

Wenn (S, E, T) nicht geschlossen ist,

dann finde $s_1 \in S$ und $a \in \Sigma$ mit $row(s_1a) \neq row(s_2)$ für alle $s_2 \in S$;

addiere s_1a zu S und gehe zu (2).

% *Äquivalenzanfrage*:

Wenn $L(M(S, E, T)) \neq L(M)$, **dann** addiere alle Präfixe des Gegenbeispiels zu S; gehe zu (1).

Trivialerweise ist der Algorithmus korrekt, sofern er terminiert.

Warum terminiert L^*?
Es seien L die zu lernende reguläre Sprache und n die Zustandszahl von $A(L)$. Beachte, dass wegen des vorigen Satzes nie ein Automat mit mehr als n Zuständen kontruiert werden wird.
Wir zeigen: Schleife (2) kann höchstens $n-1$-mal durchlaufen werden, denn die Anzahl verschiedener Zeilen ist gerade die Zustandszahl von $M(S, E, T)$.
Angenommen, ein Wort wird zu E hinzugefügt, weil die Tabelle inkonsistent ist. Dann wächst die Zahl der verschiedenen Zeilen $row(s)$ um wenigstens 1, da zwei bislang gleiche Zeilen $row(s_1)$ und $row(s_2)$ nach der Erweiterung von E verschieden sein müssen. Außerdem bleiben zwei verschiedene Zeilen trivialerweise verschieden nach irgendeiner E-Erweiterung.
Angenommen, ein Wort $s'a$ wird zu S hinzugefügt, weil die Tabelle nicht geschlossen ist. Per Def. ist $row(s'a) \neq row(s)$ für alle "alten" s. Also wächst die Zahl der verschiedenen Zeilen $row(s)$ auch in diesem Fall um wenigstens 1. $\square$

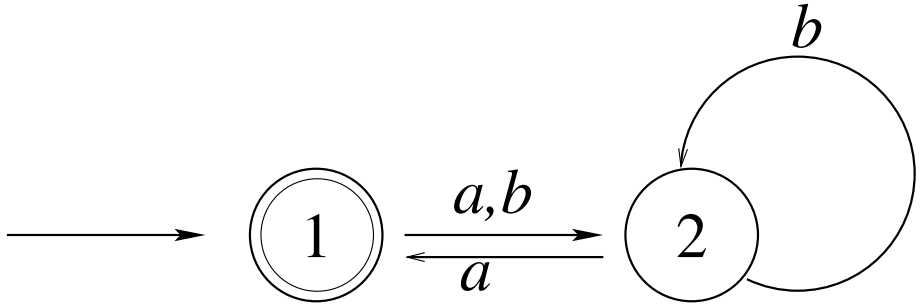
Mitteilung: Genau genommen benötigt der Algorithmus L^* höchstens $n - 1$ Äquivalenzanfragen und $O(|\Sigma| m n^2)$ viele Elementanfragen.

Rivest und Schapire haben eine Modifikation vorgeschlagen, die mit $O(|\Sigma| n^2 + n \log m)$ vielen Elementanfragen auskommt.

Beispiel: Betrachte $L \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, deren Wörter alle eine gerade Anzahl von as und eine gerade Anzahl von bs enthalten.

Die Anfangsbeobachtungstabelle T_1 enthält (nach drei Elementanfragen) die Werte $T_1(\lambda) = 1$, $T_1(a) = T_1(b) = 0$ und es ist $S = E = \{\lambda\}$. T_1 ist konsistent, aber nicht geschlossen, da (z.B.) $row(a) \neq row(\lambda)$.

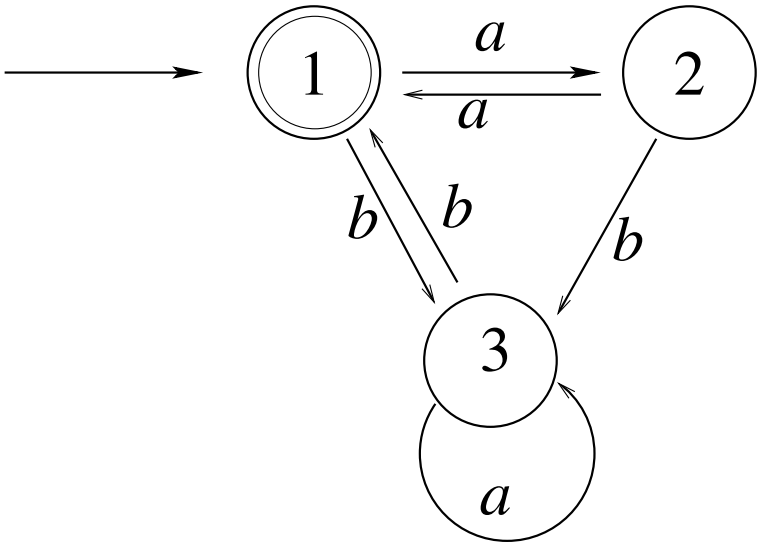
L^* fügt daher a zu S hinzu und fragt nach der Mitgliedschaft von aa und ab, i.e., $T_2(aa) = 1$ und $T_2(ab) = 0$. T_2 (das außerdem die Werte von T_1 enthält) ist konsistent und geschlossen und führt zur Äquivalenzanfrage für den Automaten:



Angenommen, der Lehrer wählt als Gegenbeispiel bb.
L^* fügt daher b und bb zu S hinzu (λ ist ja schon enthalten) und erfragt die Wörter ba, bba und bbb, um die Beobachtungstabelle T_3 zu erhalten.
Wegen $row(a) = row(b)$, aber $row(aa) \neq row(ba)$ ist diese Tabelle inkonsistent.
Deshalb fügt L^* a zu E hinzu und konstruiert mittels von fünf weiteren Elementanfragen die folgende Tabelle T_4:

T_4	λ	a
λ	1	0
a	0	1
b	0	0
bb	1	0
aa	1	0
ab	0	0
ba	0	0
bba	0	1
bbb	0	0

T_4 entspricht der Automat:

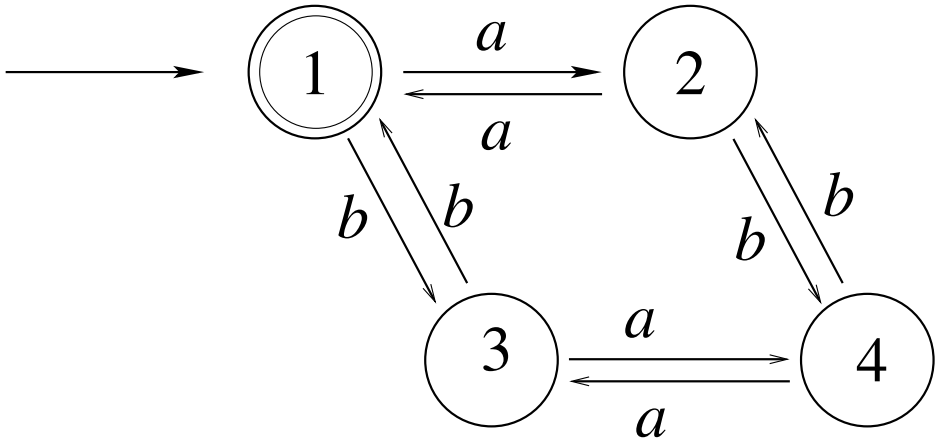


Nehmen wir nun an, der Lehrer gebe das Gegenbeispiel abb.
Daraufhin fügt L^* ab und abb zu S hinzu.
Mit fünf weiteren Elementanfragen erhält L^*:

T_5	λ	a	b für T_6
λ	1	0	0
a	0	1	0
b	0	0	1
bb	1	0	0
ab	0	0	0
abb	0	1	0
aa	1	0	0
ba	0	0	0
bba	0	1	0
bbb	0	0	1
aba	0	0	1
$abba$	1	0	0
$abbb$	0	0	0

Die Tabelle ist geschlossen, aber inkonsistent, da $row(b) = row(ab)$, aber $row(bb) \neq row(abb)$.
$\leadsto T_6$

Automat zu T_6:



Satz: Eine reguläre Sprache kann in Zeit $O(n^3+m^3)$ mittels Äquivalenzanfragen gelernt werden, wobei n die Anzahl der Zustände des kleinsten Automaten für diese Sprache und m die maximale Länge eines Gegenbeispiels ist.

BEWEIS. Wir beschränken uns beim folgenden Argument auf Sprachen über $\{a, b\}$.
Es sei $M_0, M_1, \ldots$ eine Liste aller endlichen Automaten, geordnet nach der Anzahl ihrer Zustände. $L_0, L_1, \ldots$ seien die von ihnen erkannten Sprachen.
Daher hat M_k höchstens $\log(k)$ Zustände.

Die Grundidee des Algorithmus ist, die Automaten $M_0, M_1, \ldots$ in der Reihenfolge ihrer Größe durchzuprobieren und gleichzeitig mit den Anfragen $N_0, N_1, \ldots$ das Gegenbeispiel so hochzutreiben, daß die polynomiale Schranke in n und m erhalten bleibt.

Der Algorithmus läuft wie folgt:

Setze $k = 0$.
(*) % Schleifenstart

Produziere einen Automaten N_k für $L_k \triangle \{a^k\}$.
Frage, ob N_k die gesuchte Sprache erzeugt.
Bei Antwort “Ja” gib N_k aus und terminiere.
Bei Antwort “Nein” mit Gegenbeispiel $x \neq a^k$,
setze $k = k + 1$ und geh nach (*).
Bei Antwort “Nein” mit Gegenbeispiel a^k:
frage, ob M_k die Sprache erzeugt.

Wenn “Ja”, gib M_k aus und terminiere.
Wenn “Nein”, setze $k = k + 1$ und geh nach (*).

$N_0, N_1, \ldots$ werden zuerst gefragt, damit in dem Fall, daß M_k die gesuchte Sprache erzeugt, noch gerade eben vorher ein entsprechend langes Gegenbeispiel

ausgegeben wird.
Antwortet der Lehrer mit einem anderen Gegenbeispiel als a^k, so weiß man, dass auch M_k falsch ist.
Der Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten gemäß einem der beiden folgenden Fälle:

- $L_k \triangle \{a^k\}$ ist die gesuchte Sprache, die von N_k erzeugt wird. M_k hat $\log(k)$ Zustände und $L_k \triangle \{a^k\}$ kann von einem Automaten mit n Zuständen erzeugt werden. Der Produktautomat akzeptiert $\{a^k\} = L_k \triangle (L_k \triangle \{a^k\})$ mit $n \log(k)$ Zuständen. Es folgt $n \geq \frac{k+1}{\log(k)}$, da ein endlicher Automat, der $\{a^k\}$ akzeptiert, mindestens $k + 1$ Zustände benötigt.

- L_k ist die gesuchte Sprache. Das letzte Gegenbeispiel hatte die Länge k und daher ist $m \geq k$.

Jeder Schleifendurchlauf benötigt $O(k \cdot \log(k))$ Schritte.

(Im Wesentlichen um den Automaten N_k hinzuschreiben und zu vergleichen, ob das Antwortwort a^k ist. Die Rechnungen mit M_k fallen dagegen kaum ins Gewicht.)

Da k Schleifendurchläufe stattgefunden haben, ist der Gesamtaufwand $O(k^2 \cdot \log(k))$. In beiden Fällen gilt außerdem $n + m \geq \frac{k}{\log(k)}$ und der Gesamtaufwand des Lernalgorithmus kann mit $O(n^3 + m^3)$ nach oben abgeschätzt werden. $\square$

L^* erfüllt *Uniformitätsbedingung:*
Bei der k-ten Anfrage ist die Rechenzeit bis zu dieser Anfrage sowie auch ihre Länge polynomial beschränkt in n und der maximalen Länge m' der Gegenbeispiele zu den Anfragen $1, 2, \ldots, k-1$.
Das verhindert den Trick aus dem vorigen Satz.

Mitteilung: Es gibt einen Algorithmus und ein Polynom p, der jede unbekannte, von einem Automaten mit n Zuständen erzeugte, reguläre Sprache in Zeit $p(n)$ mittels Teilmengenanfragen an einen Lehrer lernt.

Zur Orientierung von Robotern

Eine *Umgebung* E ist ein Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei
Q eine endliche Zustandsmenge,
Σ das Alphabet der möglichen Aktionen,
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Transitionsfunktion,
$q_0 \in Q$ der Startpunkt und
$F : Q \to \{0, 1\}$ die Beobachtungsfunktion (Endzustand ?) sind.

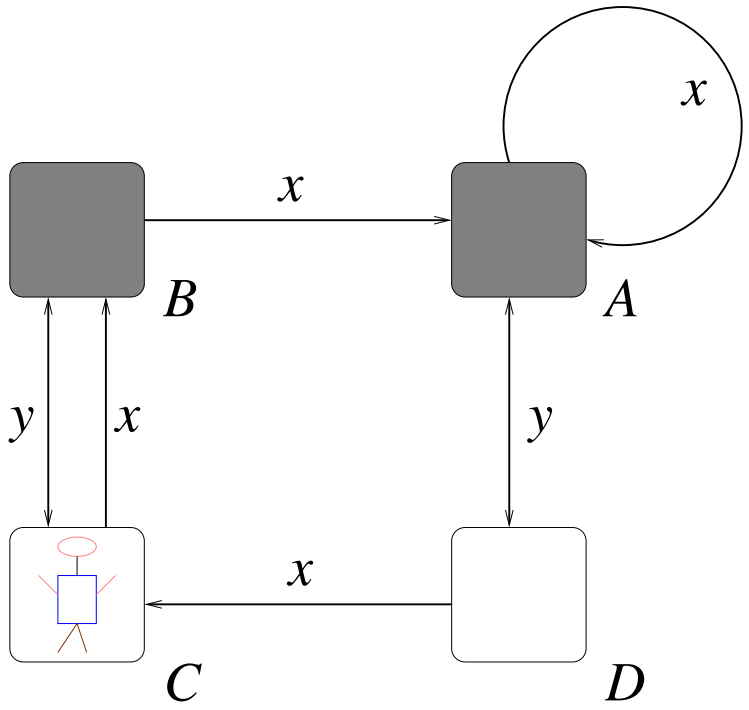
Schreibweise für die Beobachtungsfolge als Reaktion auf eine Aktionenfolge, anfangend in einem gewissen Zustand $q \in Q$:
wir setzen $q\langle\lambda\rangle = F(q)$ und
$q\langle va\rangle = q\langle v\rangle F(\delta^*(q, va))$ für beliebige $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$.
Ferner sei $Q\langle w\rangle = \{q\langle w\rangle \mid q \in Q\}$ für $w \in \Sigma^*$.

Wir sagen, dass die Folge w zwei Zustände q_1, q_2 *unterscheidet*, wenn $q_1\langle w\rangle \neq q_2\langle w\rangle$.
Erinnerung: In einem deterministischen Minimalautomaten mit n Zuständen gibt es zu jedem Zustandspaar stets (mindestens) eine unterscheidende Eingabe der Länge höchstens n.

Eine Aktionsfolge h heiße *Ortungsfolge* (engl.: homing sequence), falls für alle $q_1, q_2 \in Q$ aus $q_1\langle h\rangle = q_2\langle h\rangle$ die Zustandsgleichheit $\delta^*(q_1, h) = \delta^*(q_2, h)$ folgt.

Bemerkung: Ortungsfolgen sind ursprünglich im Zusammenhang mit dem Testen von Schaltkreisen betrachtet worden, s. das 13. Kapitel in Z. Kohavi: *Switching and Finite Automata Theory*, McGrawHill, 1978.

Beispiel: Ein Roboter muss sich in folgender einfachen Umgebung orientieren:



Als Antwort auf die Aktionenfolge xy beobachtet der Roboter, ausgehend von Zustand C, $C\langle xy\rangle = 010$, wenn wir 0 mit "weißer Zustand" und 1 mit "grauer Zustand" interpretieren.

xy unterscheidet die Zustände C und D, aber nicht die Zustände A und B.

Die Aktion x ist Ortungsfolge:

Aus $q\langle x\rangle = 00$ folgt $\delta(q,x) = C$,

$q\langle x\rangle = 01$ impliziert $\delta(q,x) = B$ und

$\delta(q,x) = 11$ liefert $\delta(q,x) = A$.

Satz: [Moore] Jeder deterministische Minimalautomat mit n Zuständen hat eine Ortungsfolge der Maximallänge n^2.

BEWEIS. Anstelle eines formalen Beweises betrachte man folgendes Programmfragment:

Setze $h = \lambda$
Solange es $q_1 \neq q_2$ in Q gibt mit:
$q_1\langle h\rangle = q_2\langle h\rangle$ aber $q_1' = \delta^*(q_1, h) \neq \delta^*(q_2, h) = q_2'$ tue:

Bestimme $x \in \Sigma^*$, das q_1' und q_2' unterscheidet.
Setze $h = hx$.

Man überlegt sich leicht, daß die Schleife höchstens n mal durchlaufen wird. □

Mitteilung: Trotz dieses einfachen Konstruktionsverfahrens für Ortungsfolgen ist es NP-vollständig, eine kürzeste Ortungsfolge zu finden.

Ein Orientierungsalgorithmus

Eingabe: Eine Ortungsfolge $\mathfrak{h}$ der zu lernenden Umgebung $\mathbb{E}$.
Ausgabe: Der $\mathbb{E}$ entsprechende minimale DEA.

1. Führe $\mathfrak{h}$ aus und beobachte die Folge σ.
Wenn σ noch nicht betrachtet wurde: Erzeuge L^*_σ.
Simuliere die nächste Anfrage von L^*_σ:

   Falls L^*_σ eine Elementanfrage für w stellt, so:
   gib (durch Experimentieren) L^*_σ die Ausgabe des durch die Aktionsfolge w erreichten Zustands.
   Falls L^*_σ eine Äquivalenzanfrage stellt, so:
   Ist der mutmaßliche DEA korrekt, so gib ihn aus,
   sonst: liefere ein Gegenbeispiel für L^*_σ; geh zu 1.

Der Algorithmus hat noch mehrere Nachteile:

1. Woher soll die Ortungsfolge $\mathfrak{h}$ kommen?

2. Woher weiß der Roboter, wann “sein” DEA korrekt ist?

3. Woher erhält der Roboter ein Gegenbeispiel?

Zum Lernen nicht-regulärer Sprachen

Unter einer Permutation Ψ wollen wir hier genauer eine Familie von Permutationen ψ_n der Menge $\{1, \ldots, n\}$ verstehen.
Ψ läßt sich als Abbildung $\Psi : \Sigma^* \to \Sigma^*$ deuten, die Wörter der Länge n gemäß ψ_n umordnet, d.h., für $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ gilt:

$$\Psi(a_1 \ldots a_n) = a_{\psi_n(1)} \ldots a_{\psi_n(n)} .$$

Die Permutation $\Psi(L)$ einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist dann die Menge aller durch Ψ permutierten Wörter von L.
Für eine Sprachfamilie $\mathcal{L}$ ist $\Psi(\mathcal{L})$ die Menge aller durch Ψ permutierten Sprachen aus $\mathcal{L}$.

Betrachte $(\psi_n^{EL})^{-1}(1) = 1$, $(\psi_n^{EL})^{-1}(n) = 2$ und
$(\psi_n^{EL})^{-1}(k) = 2 + (\psi_{n-2}^{EL})^{-1}(k-1)$ für $n > 1$ und $1 < k < n$.
$\Psi^{EL} = \{\psi_n^{EL} \mid n \in \mathbb{N}\} \rightsquigarrow \Psi^{EL}(\{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Satz: [Amar/Putzolu] Es bezeichne REG die regulären Sprachen. Dann gilt: REG $\subsetneq \Psi^{EL}$(REG).

BEWEIS. Das Beispiel liefert die Striktheit der Inklusion.
Weshalb gibt zu jeder regulären Sprache L eine andere reguläre Sprache L' mit $L = \Psi^{EL}(L')$?
Betrachte eine induzierte Zustandsfolge eines Automatens A für L:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\ldots$	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	$\ldots$	q_{n-3}	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
a_1	a_n	a_2	a_{n-1}	a_3	a_{n-2}	a_4	a_{n-3}	a_5	$\ldots$
q_1	q_n	q_2	q_{n-1}	q_3	q_{n-2}	q_4	q_{n-3}	q_5	$\ldots$

Der simulierende Automat (für L') muss daher A abwechselnd vorwärts und rückwärts simulieren. $\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe ! □

Weitere Literaturhinweise

H. Fernau. Even linear simple matrix languages: formal language properties and grammatical inference. *Theoretical Computer Science*, 289 (2002), Seiten 425–456.

Y. Takada. Learning formal languages based on control sets. In K. P. Jantke und S. Lange, Herausgeber, *Algorithmic Learning for Knowledge-Based Systems*, Band 961 aus der Reihe *LNCS*, Seiten 317–339. Springer-Verlag, 1995.

Y. Takada. A hierarchy of language families learnable by regular language learning. *Information and Computation* 123 (1995), Seiten 138–145.

Die entsprechenden Grammatik-Formalismen werden auch in der Master-Vorlesung “Formale Sprachen” vorgestellt.