

# Parameterisierte Algorithmen

WS 2007/08 in Trier

Henning Fernau

fernau@uni-trier.de

# Parameterisierte Algorithmen

## Gesamtübersicht

- Einführung
- Grundbegriffe
- Problemkerne
- Suchbäume
- Graphparameter
- Weitere Methoden
- Komplexitätstheorie—parameterisiert

## **Bisher ... heute**

Suchbäume erlauben (oft verhältnismäßig) effiziente parameterisierte Alg.

Graphprobleme werden oft einfacher, wenn sie auf gewisse Graphklassen eingeschränkt werden.

Das letzte Mal haben wir dazu Kantengraphen betrachtet.

Heute werden wir uns planare Graphen ansehen.

## Eulers Formel: PIS

PLANARE UNABHÄNGIGE MENGE (PIS)

**Eingabe:** ein planarer Graph  $G = (V, E)$

**Parameter:** eine natürliche Zahl  $k$

**Frage:** Gibt es eine unabhängige Menge  $I \subseteq V$  mit  $|I| = k$ ?

**Hinweis:** IS  $W[1]$ -hart auf allgemeinen Graphen, polynomiell auf Kantengraphen.

**Satz 1** *Durch triviales Verzweigen bei kleingradigen Knoten:  $\mathcal{O}^*(6^k)$ .*

---

**Algorithm 1** A simple search tree algorithm for PIS, called PIS-ST-simple

---

**Input(s):** planar graph  $G = (V, E)$ , positive integer  $k$

**Output(s):** YES if  $G$  has an independent set  $I$  with  $|I| = k$ ; NO otherwise

**if**  $k \leq 0$  **then**

    return YES

**else if**  $V = \emptyset$  **then**

    return NO

5: **else**

    Let  $v$  be a vertex of lowest degree in  $G$ .

    {One vertex from  $N[v]$  will be in any maximal independent set.}

**for all**  $x \in N[v]$  **do**

**if** PIS-ST-simple( $G[V \setminus N[x]]$ ,  $k - 1$ ) **then**

10:         return YES

    {All trials have failed.}

    return NO

---

## Mehr Mathematik: PIS

**Satz 2** (Borodin et al.) *Jeder zusammenhängende planar eingebettete Graph mit wenigstens zwei Knoten besitzt*

1. *entweder zwei Knoten mit Gradsumme höchstens fünf*
2. *oder zwei Knoten vom Abstand höchstens zwei mit Gradsumme höchstens sieben*
3. *oder ein Dreieck mit zwei inzidenten Knoten mit Gradsumme höchstens neun*
4. *oder zwei über eine Kante  $\{u, v\}$  benachbarte Dreiecke mit Gradsumme von  $u$  und  $v$  höchstens elf.*

**Hinweis** Damit:  $\mathcal{O}^*(5.17^k)$ .

---

**Algorithm 2** A more advanced search tree algorithm for PIS, called PIS-ST

---

**Input(s):** planar graph  $G = (V, E)$ , positive integer  $k$

**Output(s):** YES if  $G$  has an independent set  $I$  with  $|I| = k$ ; NO otherwise

**if**  $k \leq 0$  **then**

    return YES

**else if**  $V = \emptyset$  **then**

    return NO

5: **else**

    Let  $v$  be a vertex of lowest degree in  $G$ .

    {One vertex from  $N[v]$  will be in any maximal independent set.}

**if**  $\deg(v) \leq 4$  **then**

**for all**  $x \in N[v]$  **do**

10:         **if** PIS-ST( $G[V \setminus N[x]]$ ,  $k - 1$ ) **then**

            return YES

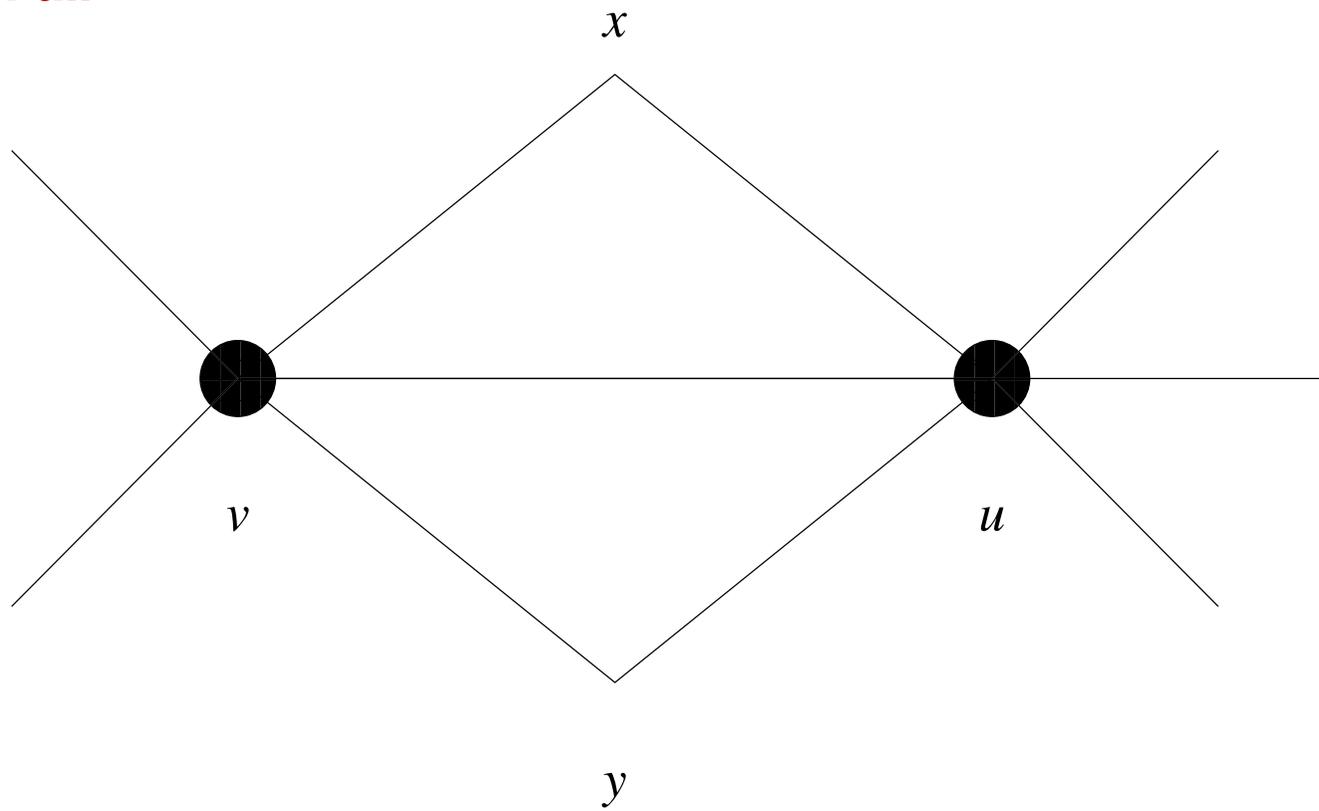
        return NO

**else**

        {The fourth case of Theorem 2 applies. Details to follow...}

---

## Der vierte Fall



---

$\{N(v) = \{x, y, u, v_1, v_2\}$  with  $N(u) = \{x, y, v, u_1, u_2, u_3\}$

**if** PIS-ST( $G[V \setminus N[v]]$ ,  $k - 1$ ) **then**

return YES; {Branch 1:  $v$  in IS ?}

**else if** PIS-ST( $G[V \setminus N[u]]$ ,  $k - 1$ ) **then**

5: return YES; {Branch 2:  $v$  is not in IS, but  $u$  ?}

**else if** PIS-ST( $G[V \setminus N[x]]$ ,  $k - 1$ ) **then**

return YES; {Branch 3:  $v, u$  is not in IS, but  $x$  ?}

**else if** PIS-ST( $G[V \setminus N[y]]$ ,  $k - 1$ ) **then**

return YES; {Branch 4:  $v, u, x$  is not in IS, but  $y$  ?}

10: **else**

{Now  $v, u, x, y$  is not in IS, so one of the  $v_i$  and one of the  $u_j$  must be in a maximal independent set.}

**for all**  $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$  **do**

**if** PIS-ST( $G[V \setminus (N[v_i] \cup N[u_j])]$ ,  $k - 2$ ) **then**

return YES

15: return NO

## Zur Algorithmenanalyse

Korrektheit: Folgt mit dem Satz von Borodin etc.

Laufzeitabschätzung:  $T$  erfüllt

$$T(k) \leq 4T(k-1) + 6T(k-2).$$

Das liefert die Behauptung:

$$c^k \approx 4c^{k-1} + 6^{k-2}$$

$$c^2 - 4c + 6 = 0$$

$$\leadsto c = 2 + \sqrt{10} \leq 5.17.$$

## Ein komplizierteres Beispiel: PDS

PLANARE DOMINIERENDE MENGE (PDS)

**Eingabe:** ein planarer Graph  $G = (V, E)$

**Parameter:** eine natürliche Zahl  $k$

**Frage:** Gibt es eine dominierende Menge  $D \subseteq V$  mit  $|D| \leq k$ ?

**Hinweis:** Problemkern von  $67k$  (sehr kompliziert)

**Problem** beim Verzweigen: es entstehen zwei Arten von Knoten:

- Solche, die noch abgedeckt werden müssen und
- solche, die man schon dominiert hat, die aber noch in die Dominierungsmenge aufgenommen werden sollten.

## Eine Verallgemeinerung durch Annotation

PLANARE ANNOTIERTE DOMINIERENDE MENGE (PADS)

**Eingabe:** ein planarer Graph  $G = (V, E)$  und Knotenmenge  $B$

**Parameter:** eine natürliche Zahl  $k$

**Frage:** Gibt es eine Menge  $D \subseteq V$ ,  $|D| \leq k$ , die jeden Knoten aus  $B$  dominiert ?

Wir nennen die Knoten aus  $B$  schwarz (black) und deren Komplement  $W$  (weiß).

M.a.W.: Wir betrachten planare Schwarz-Weiß-Graphen.

**Frage:** Gibt es stets kleingradigen schwarzen Knoten ?

“Ohne Weiteres” nicht: Betrachte Sterngraph, bei dem nur das Zentrum schwarz.

## Problemlösung Reduktionsregeln

R1: Lösche Kanten zwischen weißen Knoten.

R2: Lösche weiße Knoten vom Grad 1.

R3: Sei  $u$  ein weißer Knoten vom Grad 2 mit schwarzen Nachbarn  $v_1$  und  $v_2$ .

R3(a): Gibt es Kante zwischen  $v_1$  und  $v_2$ , so lösche  $u$ .

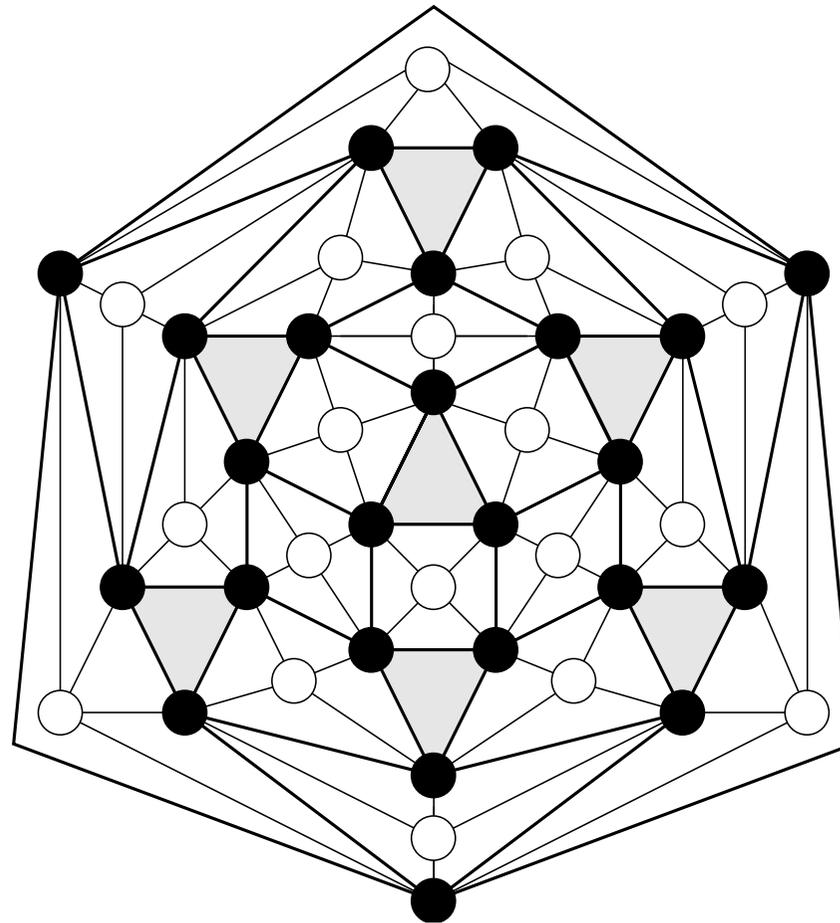
R3(b): Gibt es einen weiteren Knoten  $v_3 \in N(v_1) \cap N(v_2)$ , so lösche  $u$ .

R4: Sei  $u$  ein weißer Knoten vom Grad 3 mit schwarzen Nachbarn  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$ .

Gibt es Kanten  $\{v_1, v_2\}$  und  $\{v_2, v_3\}$ , so lösche  $u$ .

**Lemma 3** *Die Reduktionsregeln sind korrekt.*

**Satz 4** *In einem reduzierten planaren Schwarz-Weiß-Graphen gibt es einen schwarzen Knoten vom Maximalgrad sieben.*



**Ein irreduzibles Beispiel**

## Ein “echtes” planares Beispiel

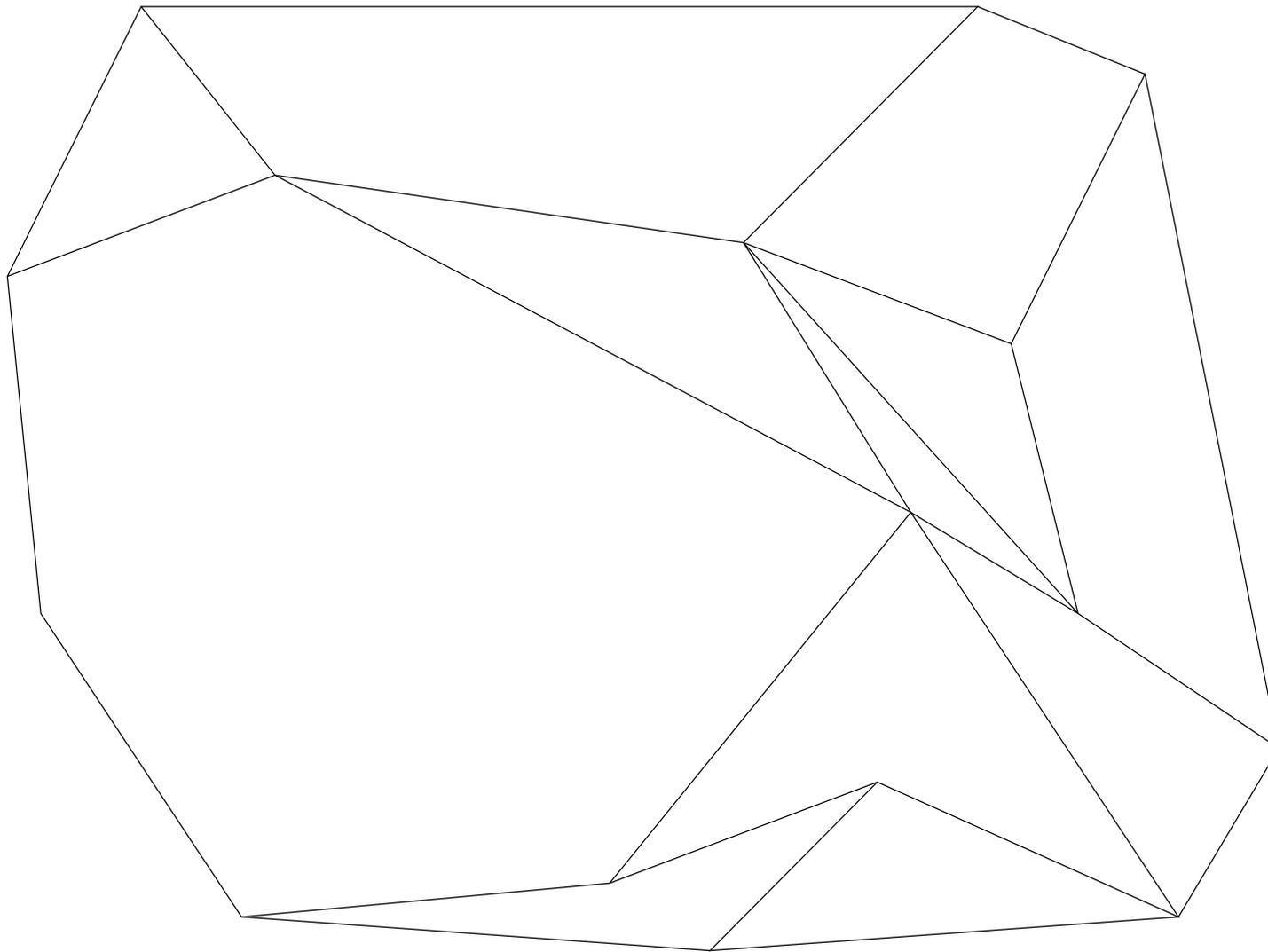
FACETTENÜBERDECKUNG (FC)

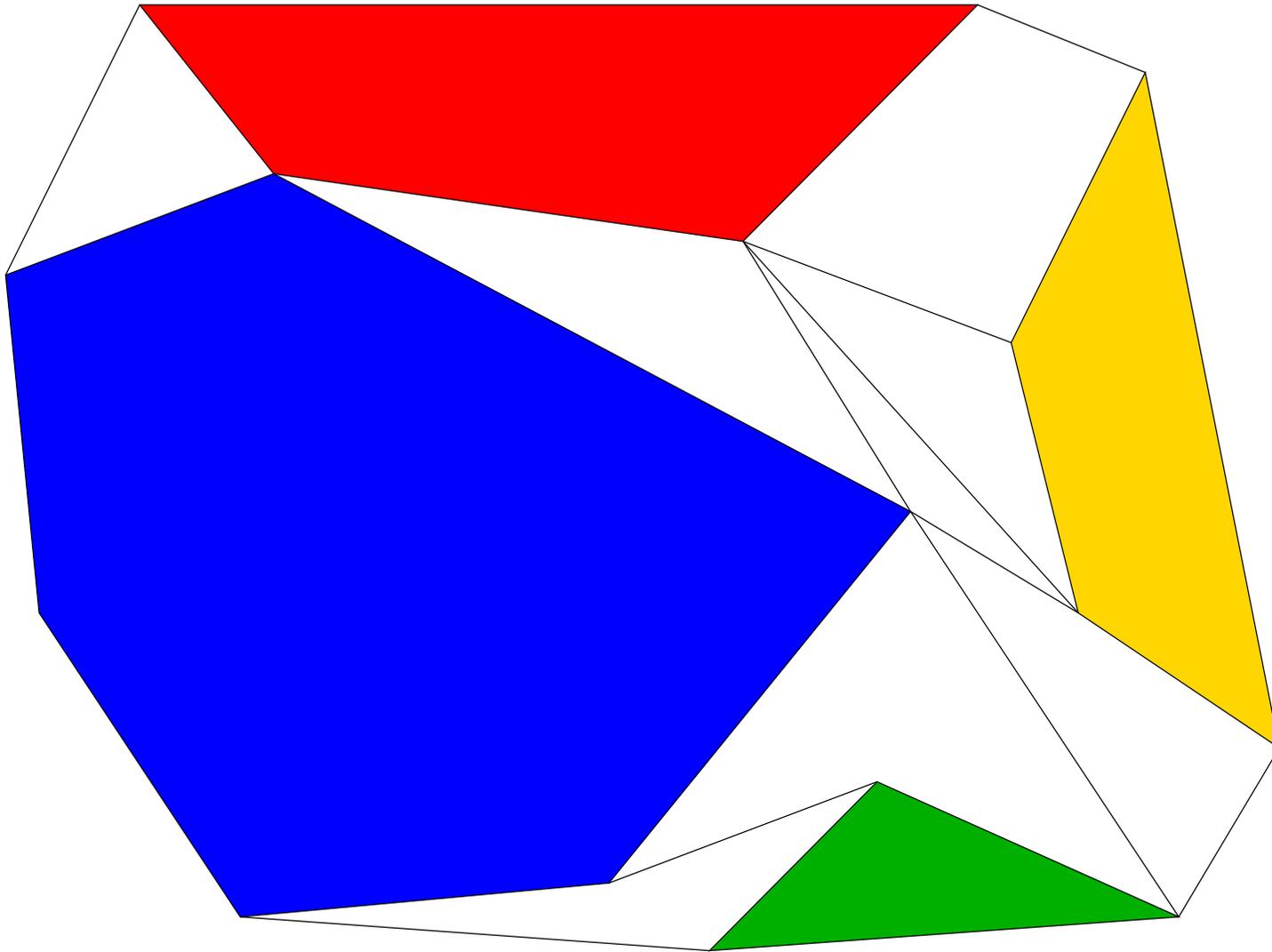
**Eingabe:** ein eingebetteter planarer Graph  $G = (V, E)$

**Parameter:** eine natürliche Zahl  $k$

**Frage:** Gibt es eine **Facettenüberdeckung** der Größe höchstens  $k$  ?

Hierbei ist eine Facettenüberdeckung eine Menge von Facetten, an deren Grenzlinien alle Knoten des vorgelegten eingebetteten Graphen liegen.





## Idee & Problem

Verzweigen nach “kleingradigen” Knoten scheint zunächst möglich nach der Euler-Formel.

ABER: wir erhalten schon nach dem ersten Verzweigen zwei Arten von Knoten: bereits abgedeckte (marked) und noch abzudeckende (active).

Facetten, auf denen wir bereits verzweigt haben, markieren wir ebenso.

Wir brauchen aber doch nicht auf kleingradigen markierten Knoten zu verzweigen ?!

↪ **Annotierte Facettenüberdeckung**, formalisiert durch Funktionen  $\mu_V : V \rightarrow \{\text{active, marked}\}$  und  $\mu_F : F \rightarrow \{\text{active, marked}\}$ .

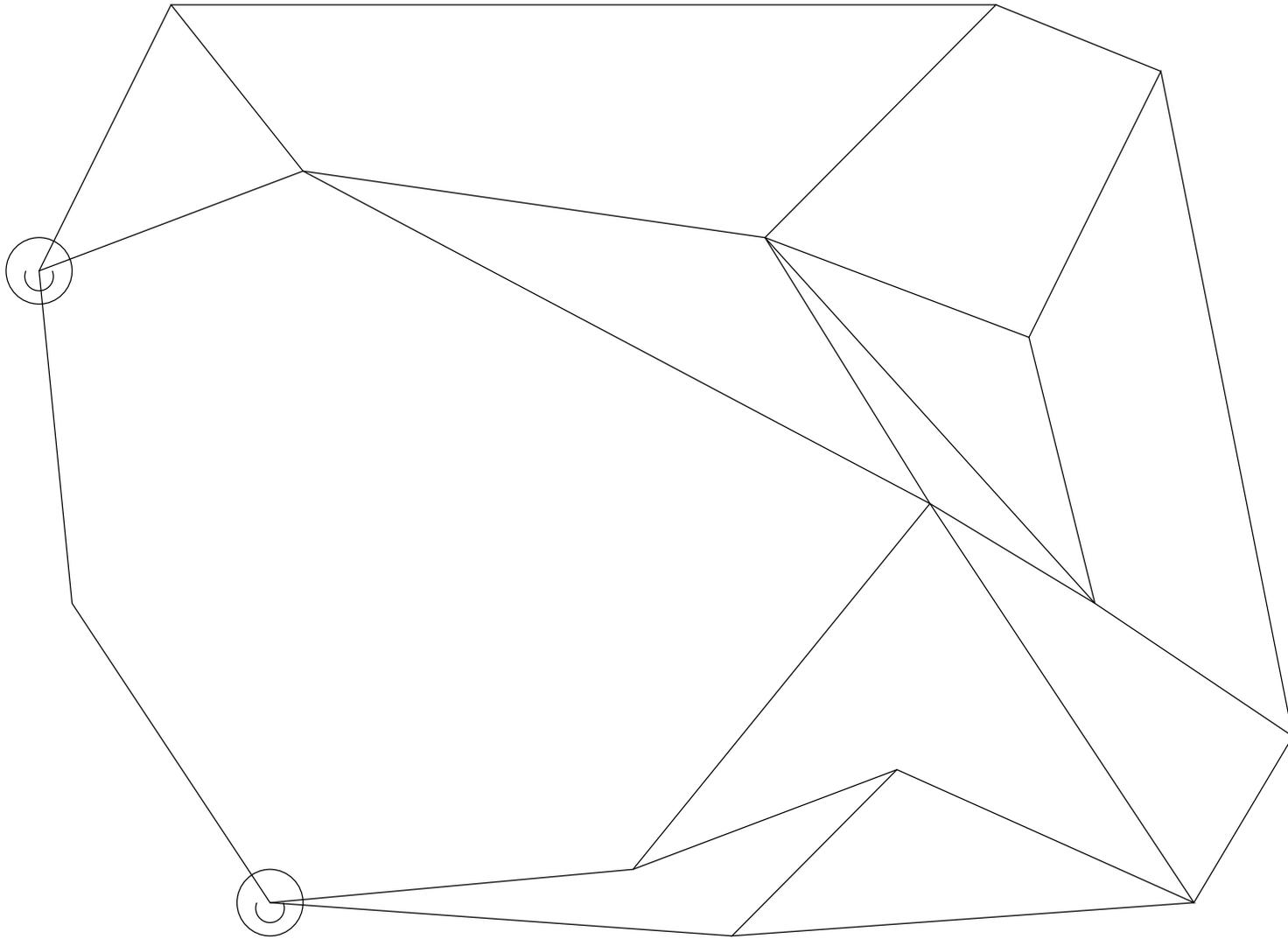
Eingangs sind alle Knoten und Facetten aktiv.

## HS-Regeln als Erbschaft

$F_a(v)$ : die zu  $v$  benachbarten aktiven Facetten

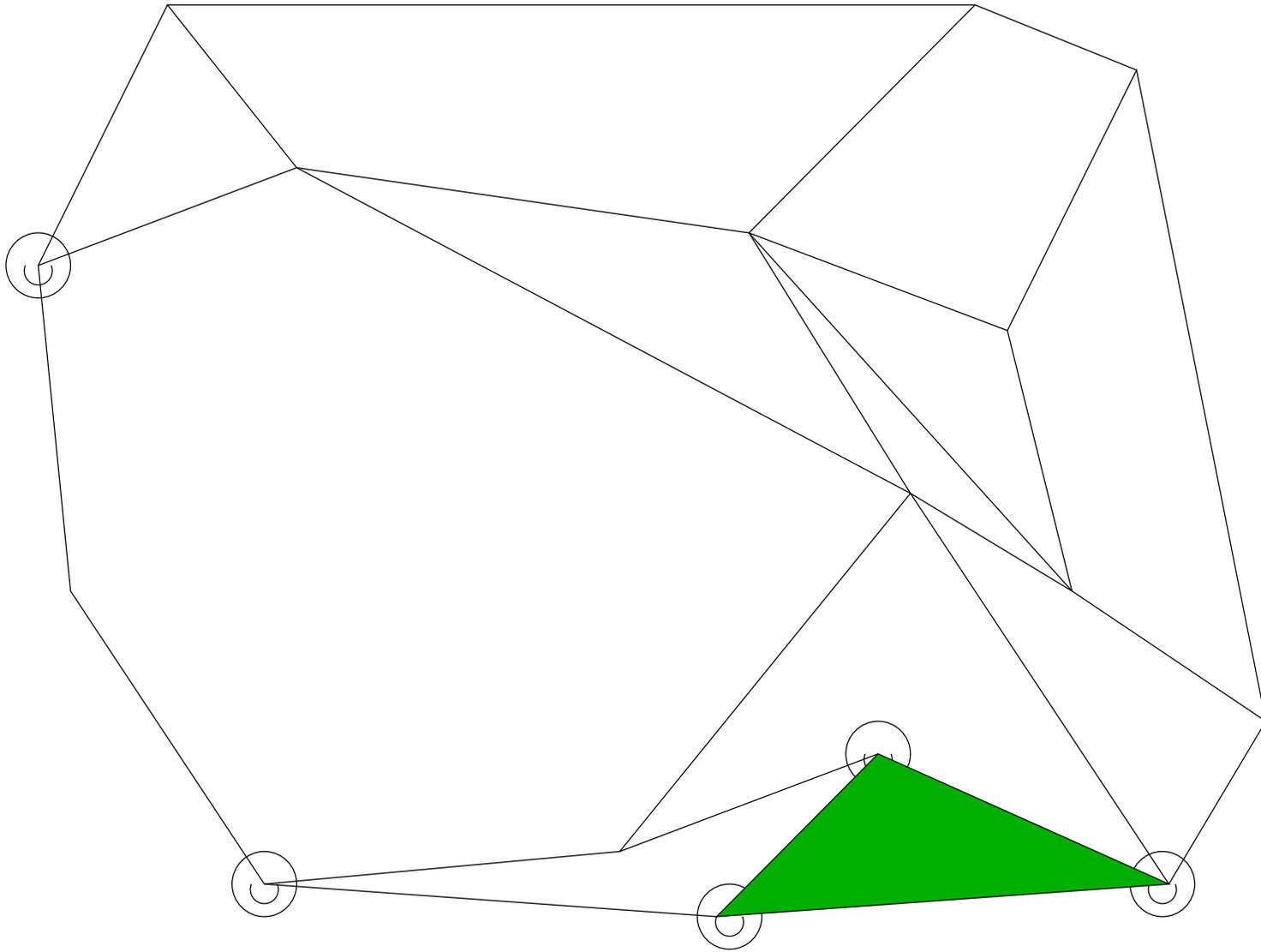
$V_a(f)$ : die an  $f$  anliegenden aktiven Knoten

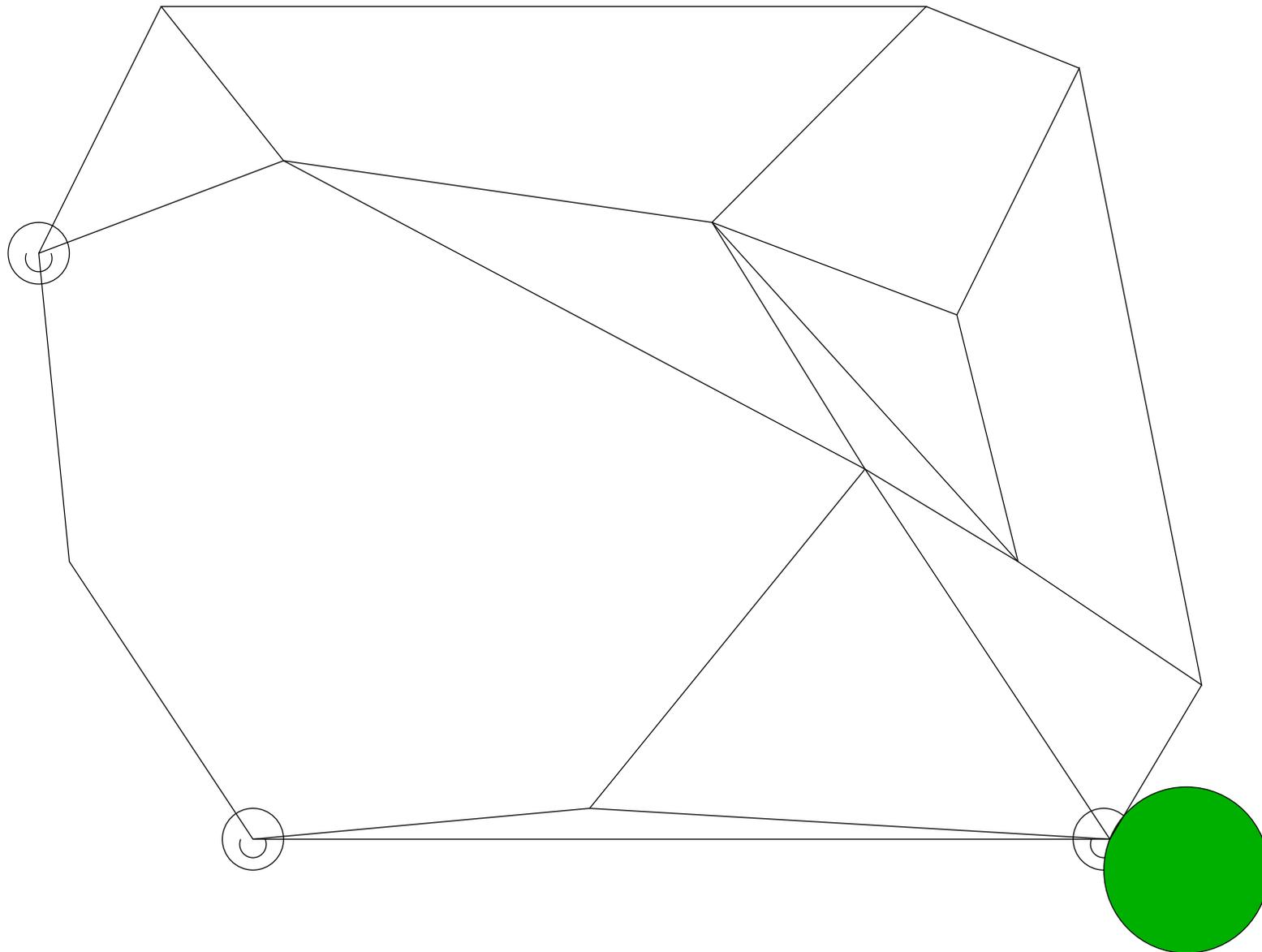
- Gilt  $F_a(u) \subseteq F_a(v)$  für aktive Knoten  $u, v$ , so markiere  $v$ .
- Gilt  $|F_a(v)| = 1$  und ist  $v$  aktiv, so muss  $F_a(v)$  in die Facettenüberdeckung; anschließend werden  $v$  und  $f$  markiert.
- Gilt  $V_a(f) \subseteq V_a(f')$  für aktive Facette  $f, f'$ , so markiere  $f$ .

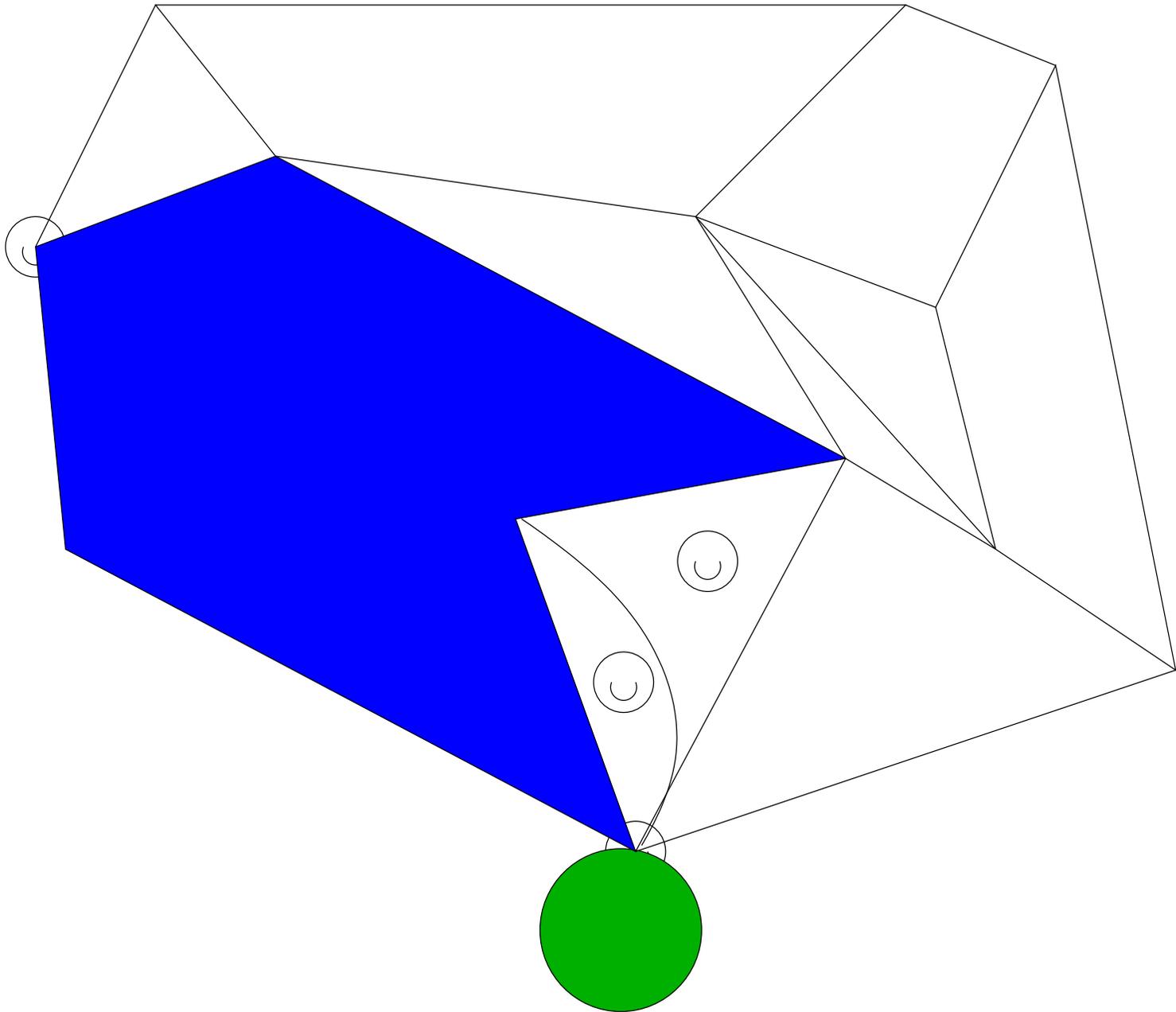


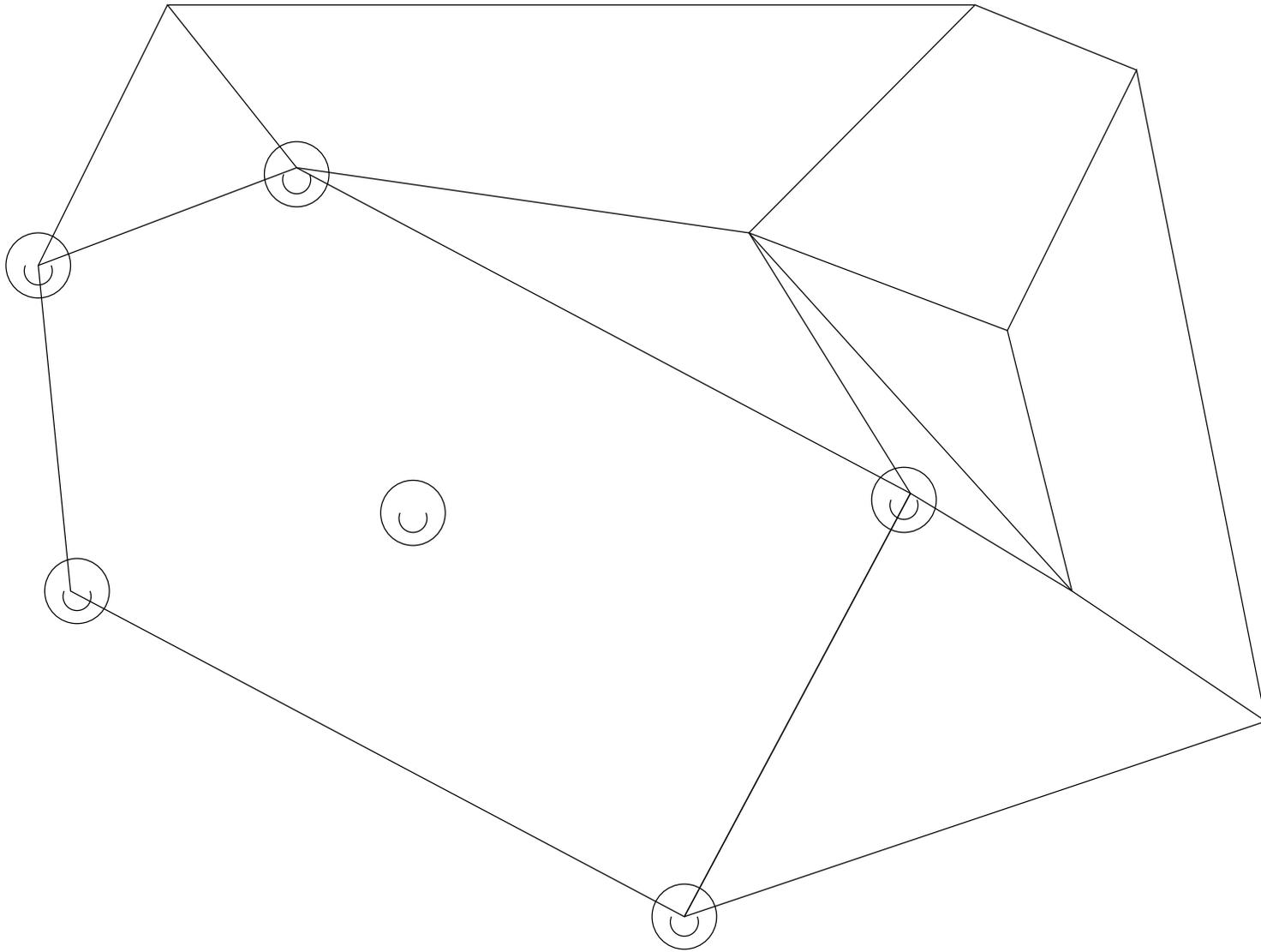
## Geometrische Operationen

- Sind  $u$  und  $v$  zwei benachbarte markierte Knoten, so verschmelze  $u$  und  $v$  (wobei möglicherweise Mehrfachkanten oder Schlingen eingeführt werden).
- Ist  $u$  ein markierter Knoten mit zwei aktiven Nachbarn  $v, w$ , sodass alle drei Knoten an einer aktiven Facette  $f$  anliegen, so unterteile  $f$  in zwei Facetten durch Einführung einer neuen Kante zwischen  $v$  und  $w$ , die innerhalb von  $f$  gezeichnet werden muss (wieder kann dies Mehrfachkanten liefern). Das neue Dreieck  $u, v, w$  ist markiert, während “der Rest” von  $f$  aktiv ist.
- Lösche markierte Knoten vom Grad Eins.
- Markierte Knoten  $v$  mit  $|F_\alpha(v)| = 0$  können ebenfalls gelöscht werden. So werden die  $v$  zuvor umschließenden markierten Facetten durch eine einzige markierte Facette ersetzt.
- Eine markierte Facette mit nur einem oder zwei Knoten auf ihrer Grenzlinie wird durch Löschen einer beliebig gewählten Begrenzungskante zerstört.
- Zwei markierte Facetten mit einer Grenzkante werden durch Löschen derselben zu einer neuen markierten Facette (u.U.) verschmolzen.









---

**Algorithm 3** FC-ST: A simple search tree algorithm for annotated FC

---

**Input(s):** an annotated plane graph  $G = (V, E)$  with face set  $F$  and marking functions  $\mu_V$  and  $\mu_F$ ,  
a positive integer  $k$

**Output(s):** YES iff  $G$  has an annotated face cover set  $C \subseteq F$  with  $|C| \leq k$

Exhaustively apply the reduction rules.  $\{\rightsquigarrow G$  (etc.) as before.}

**if**  $k < 0$  **then**

    return NO

**else if**  $V_a = \emptyset$  **then**

5:   return YES

**else**

    Let  $v$  be a vertex of lowest face degree in  $G$ .

    Choose  $f \in F_a$  such that  $f$  is incident to  $v$ .

    Mark  $f$  and all vertices that are on the boundary of  $f$ .

10:   Call the resulting marking functions  $\mu'_V$  and  $\mu'_F$ .

**if** FC-ST( $G, F, \mu'_V, \mu'_F, k - 1$ ) **then**

        return YES

**else**

        Mark  $f$ , i.e., return FC-ST( $G, F, \mu_V, \mu'_F, k$ )

---

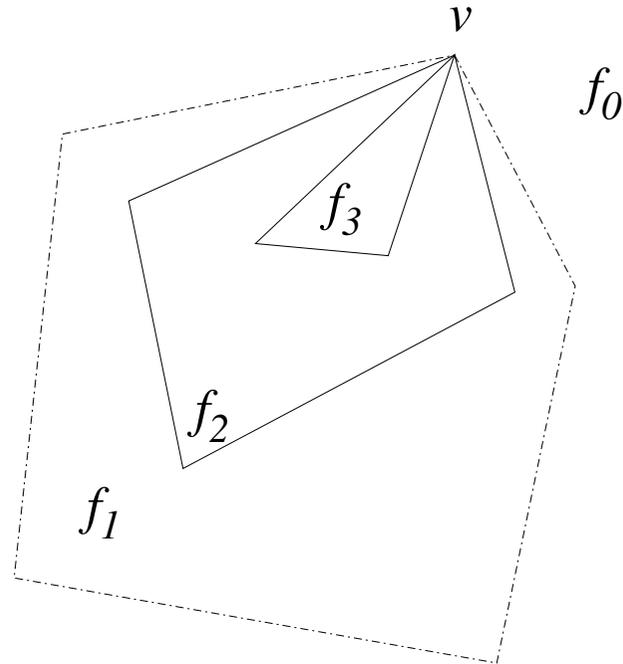
**Satz 5** *Algorithmus 3 löst das AFC Problem in Zeit  $\mathcal{O}^*(5^k)$ .*

Zu zeigen wäre: In einem annotierten reduzierten (Multi-)graphen  $G$  gibt es stets einen Knoten, der an höchstens fünf aktiven Facetten anliegt.

Der Satz von Borodin u.a. gestattet wiederum, die Laufzeit noch deutlich zu verbessern.

**Satz 6** *FC kann in Zeit  $\mathcal{O}^*(4.6056^k)$  gelöst werden.*

## Was sind Inseln ?



Im Beispiel: Am markierten Knoten  $v$  sind drei Schlingen (Multigraph!), die die Ebene in vier Bereiche (Inseln) aufteilen, die unabhängig voneinander gelöst werden können, da  $v$  markiert.

## Weitere Aussagen

**Lemma 7** *Ist  $G = (V, E, V_a, F_a)$  ein annotierter, eingebetteter, reduzierter Multigraph ohne Inseln mit Facettenmenge  $F$  (als Instanz eines ANNOTATED FACE COVER Problems mit Parameter  $k$ ), so gilt:*

- 1. Es gibt keinen markierten Knoten in  $G$ .*
- 2. Die einzigen degenerierten Facetten die möglicherweise existieren sind aktive Facetten  $f$  mit zwei inzidenten Knoten.*
- 3. Jedes Knotenpaar  $\{u, v\}$  hat höchstens eine inzidente degenerierte Facette.*
- 4. Die beiden zu einer degenerierten Facette über Kanten angrenzenden Facetten sind markiert.*

## Zum Beweis des “einfachen” Satzes:

Zu zeigen: Ist  $G = (V, E, V_\alpha, F_\alpha)$  ein annotierter, eingebetteter, reduzierter Multigraph ohne Inseln mit Facettenmenge  $F$  (als Instanz eines ANNOTATED FACE COVER Problems mit Parameter  $k$ ) gibt es stets einen Knoten mit höchstens fünf inzidenten aktiven Facetten.

Betrachte den schlichten eingebetteten Graphen  $G' = (V, E')$ , der aus  $G$  entsteht, indem wir (nur) eine Kante zwischen  $u$  und  $v$  zeichnen, sobald es irgendeine Kante zwischen  $u$  und  $v$  in  $G$  gibt.

Euler  $\rightsquigarrow$  In  $G'$  können wir einen Knoten vom Maximalgrad fünf finden.

Gemäß dem Lemma könnten der Kante  $uv$  in  $G$  zwei Kanten (aber nicht mehr) zwischen  $u$  und  $v$  entsprechen. Somit gäbe es höchstens 10 an  $v$  angrenzende Facetten.

Von denen können aber (mit dem Lemma) höchstens 5 aktiv sein.

---

**Algorithm 4** An advanced search tree algorithm for ANNOTATED FACE COVER, called FC-ST-advanced

---

**Input(s):** an annotated plane graph  $G = (V, E)$  with face set  $F$  and marking functions  $\mu_V$  and  $\mu_F$ , a positive integer  $k$

**Output(s):**  $C$  if  $G$  has an annotated face cover set  $C \subseteq F$  with  $|C| \leq k$ ; NO otherwise

Exhaustively apply the reduction rules.

{The resulting instance will be also called  $G$  (etc.) as before.}

**if**  $k < 0$  **then**

    return NO

5: **else if**  $V_a = \emptyset$  **then**

    return  $\emptyset$

**else if**  $G$  contains a marked vertex  $v$  whose only neighbor is  $v$  itself **then**

    Recursively compute minimum face covers  $C_0, \dots, C_r$  of the island graphs  $G_0, \dots, G_r$

**if**  $\exists i : C_i = \text{NO} \vee \sum_{i=0}^r |C_i| > k$  **then**

10:     return NO

**else**

        return  $\bigcup_{i=0}^r C_i$

**else**

    {Details on next slide}

---

---

**Algorithm 5** The non-island-case

---

Let  $u$  be a vertex of lowest face degree in  $G$ .

{One incident face of  $u$  must be used to cover  $u$ .}

**if**  $\deg_a(u) \leq 4$  **then**

Choose  $f \in F_a$  such that  $f$  is incident to  $u$ .

5: Mark  $f$  and all vertices that are on the boundary of  $f$ .

Call the resulting marking functions  $\mu'_V$  and  $\mu'_F$ .

Let  $C := \text{FC-ST-advanced}(G, F, \mu'_V, \mu'_F, k - 1)$

**if**  $C \neq \text{NO}$  **then**

return  $C \cup \{f\}$

10: **else**

Mark (only)  $f$ , i.e., return  $\text{FC-ST-advanced}(G, F, \mu_V, \mu'_F, k)$

**else**

{Let  $N(u) = \{u_1, u_2, v, w, z\}$  be the neighbors of  $u$  and similarly  $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, u, w, z\}$ .}

**if** all active faces incident with  $v$  are degenerate **then**

15: execute FC-ST-case-1

**else if** no active faces incident with  $v$  are degenerate **then**

execute FC-ST-case-2

**else**

{all active faces incident with  $u$  are degenerate; only one active face incident with  $v$  is degenerate}

20: execute FC-ST-case-3

---

**Algorithm 6** The code of FC-ST-case-1

---

Let  $G' = G \setminus \{u, v\}$  and mark the face  $f$  to which (formally)  $u, v$  belonged;

modify  $F, \mu_v, \mu_f$  accordingly, yielding  $F', \mu'_v$  and  $\mu'_f$ .

Let  $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_v, \mu'_f, k - 1)$

**if**  $C \neq \text{NO}$  **then**

    return  $C \cup \{f\}$

5: **else**

**for all** unordered vertex pairs  $\{x, y\}$  such that  $x \in N(u) \setminus \{v\}$  and  $y \in N(v) \setminus \{x, u\}$  **do**

        Modify  $\mu'_v$  so that  $x$  and  $y$  are the only vertices of  $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$  that are marked.

        Let  $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_v, \mu'_f, k - 2)$

**if**  $C \neq \text{NO}$  **then**

10:             return  $C \cup \{f\}$

    return NO

---

---

**Algorithm 7** The code of FC-ST-case-2

---

Let  $G' = G \setminus \{u, v\}$  and mark the face  $f$  to which (formally)  $u, v$  belonged;  
modify  $F, \mu_V, \mu_F$  accordingly, yielding  $F', \mu'_V$  and  $\mu'_F$ .

**for all** vertices  $x \in \{w, z\}$  **do**

    Modify  $\mu'_V$  so that  $x$  is the only vertex of  $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$  that is marked.

    Let  $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_V, \mu'_F, k - 1)$

5: **if**  $C \neq \text{NO}$  **then**

    return  $C \cup \{f\}$

**for all** vertices  $x \in \{u_1, u_2\}$  and  $y \in \{v_1, v_2, v_3\}$  **do**

    Modify  $\mu'_V$  so that  $x$  and  $y$  are the only vertices of  $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$  that are marked.

    Let  $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_V, \mu'_F, k - 2)$

10: **if**  $C \neq \text{NO}$  **then**

    return  $C \cup \{f\}$

return NO

---

---

**Algorithm 8** The code of FC-ST-case-3

---

**for all faces**  $f \in F_a(u)$ ,  $g \in F_a(v)$  **do**

Mark  $f$  and  $g$  and all vertices in  $V_a(f) \cup V_a(g)$ ; call the modified marking functions  $\mu'_v$  and  $\mu'_f$ .

Let  $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F, \mu'_v, \mu'_f, k - |\{f, g\}|)$

**if**  $C \neq \text{NO}$  **then**

5:     return  $C \cup \{f, g\}$

return NO

---

## **Zusammenfassung** Suchbaumentwurf

**Grundidee:** Gibt es **beschränkte** Kandidatenmengen, aus denen parameterreduzierend ein Element ausgewählt werden muss ?

**Beispiele:**

Hyperkante bei Hitting Set

Knoten-Nachbarschaft bei PIS

Dabei (wie so) oft **hilfreich**: mathematische Ergebnisse

Bsp.: Existenz kleingradiger Knoten in planaren Graphen

**Noch ein Beispiel:** Wie ergibt sich hier ein Suchbaumalgorithmus ?  
Eine **Clique** ist ein vollständiger Teilgraph.  
Ein **Cluster** ist eine Clique, die eine Zusammenhangskomponente ist.  
Bei einem **Clustergraph** bildet jede Zusammenhangskomponente eine Clique.

CLUSTERKNOTENPROBLEM (CLUSTER VERTEX DELETION CVD)

**Eingabe:** Ein Graph  $G = (V, E)$

**Parameter:**  $k \in \mathbb{N}$

**Frage:** Gibt es eine Knotenmenge  $D \subseteq V$ , sodass  $|D| \leq k$  und  $G - D$  ist ein Clustergraph ?

**Lemma 8** *Enthält  $G$  einen induzierten  $P_2$ , so ist  $G$  kein Clustergraph (und umgekehrt).*

**Frage:** Wie sehen also geeignete Kandidatenmengen aus (zum Verzweigen) ?

## **Zusammenfassung** der Grundtechniken

Kerne (Datenreduktion) kennzeichnen FPT

Praktisch sind sie alleine eher Heuristiken zum Lösen harter Probleme.

In Kombination mit guten Suchbaumstrategien liefert dies die praktisch besten parameterisierten Algorithmen.

Suchbäume alleine scheinen nicht FPT zu kennzeichnen (**offene Frage !**).

Suchbäume liefern meist den entscheidend( verbessernd)den Anteil für gute Laufzeitabschätzungen.