

Parameterisierte Algorithmen

WS 2007/08 in Trier

Henning Fernau

fernau@uni-trier.de

Parameterisierte Algorithmen

Gesamtübersicht

- Einführung
- Grundbegriffe
- Problemkerne
- Suchbäume
- Graphparameter
- Weitere Methoden
- Komplexitätstheorie—parameterisiert

Bisher ... heute

Suchbäume erlauben (oft verhältnismäßig) effiziente parameterisierte Alg.

Graphprobleme werden oft einfacher, wenn sie auf gewisse Graphklassen eingeschränkt werden.

Das letzte Mal haben wir dazu Kantengraphen betrachtet.

Heute werden wir uns planare Graphen ansehen.

Eulers Formel: PIS

PLANARE UNABHÄNGIGE MENGE (PIS)

Eingabe: ein planarer Graph $G = (V, E)$

Parameter: eine natürliche Zahl k

Frage: Gibt es eine unabhängige Menge $I \subseteq V$ mit $|I| = k$?

Hinweis: IS $W[1]$ -hart auf allgemeinen Graphen, polynomiell auf Kantengraphen.

Satz 1 *Durch triviales Verzweigen bei kleingradigen Knoten: $\mathcal{O}^*(6^k)$.*

Algorithm 1 A simple search tree algorithm for PIS, called PIS-ST-simple

Input(s): planar graph $G = (V, E)$, positive integer k

Output(s): YES if G has an independent set I with $|I| = k$; NO otherwise

if $k \leq 0$ **then**

 return YES

else if $V = \emptyset$ **then**

 return NO

5: **else**

 Let v be a vertex of lowest degree in G .

 {One vertex from $N[v]$ will be in any maximal independent set.}

for all $x \in N[v]$ **do**

if PIS-ST-simple($G[V \setminus N[x]]$, $k - 1$) **then**

10: return YES

 {All trials have failed.}

 return NO

Mehr Mathematik: PIS

Satz 2 (Borodin et al.) *Jeder zusammenhängende planar eingebettete Graph mit wenigstens zwei Knoten besitzt*

1. *entweder zwei Knoten mit Gradsumme höchstens fünf*
2. *oder zwei Knoten vom Abstand höchstens zwei mit Gradsumme höchstens sieben*
3. *oder ein Dreieck mit zwei inzidenten Knoten mit Gradsumme höchstens neun*
4. *oder zwei über eine Kante $\{u, v\}$ benachbarte Dreiecke mit Gradsumme von u und v höchstens elf.*

Hinweis Damit: $\mathcal{O}^*(5 \cdot 17^k)$.

Algorithm 2 A more advanced search tree algorithm for PIS, called PIS-ST

Input(s): planar graph $G = (V, E)$, positive integer k

Output(s): YES if G has an independent set I with $|I| = k$; NO otherwise

if $k \leq 0$ **then**

 return YES

else if $V = \emptyset$ **then**

 return NO

5: **else**

 Let v be a vertex of lowest degree in G .

 {One vertex from $N[v]$ will be in any maximal independent set.}

if $\deg(v) \leq 4$ **then**

for all $x \in N[v]$ **do**

10: **if** PIS-ST($G[V \setminus N[x]]$, $k - 1$) **then**

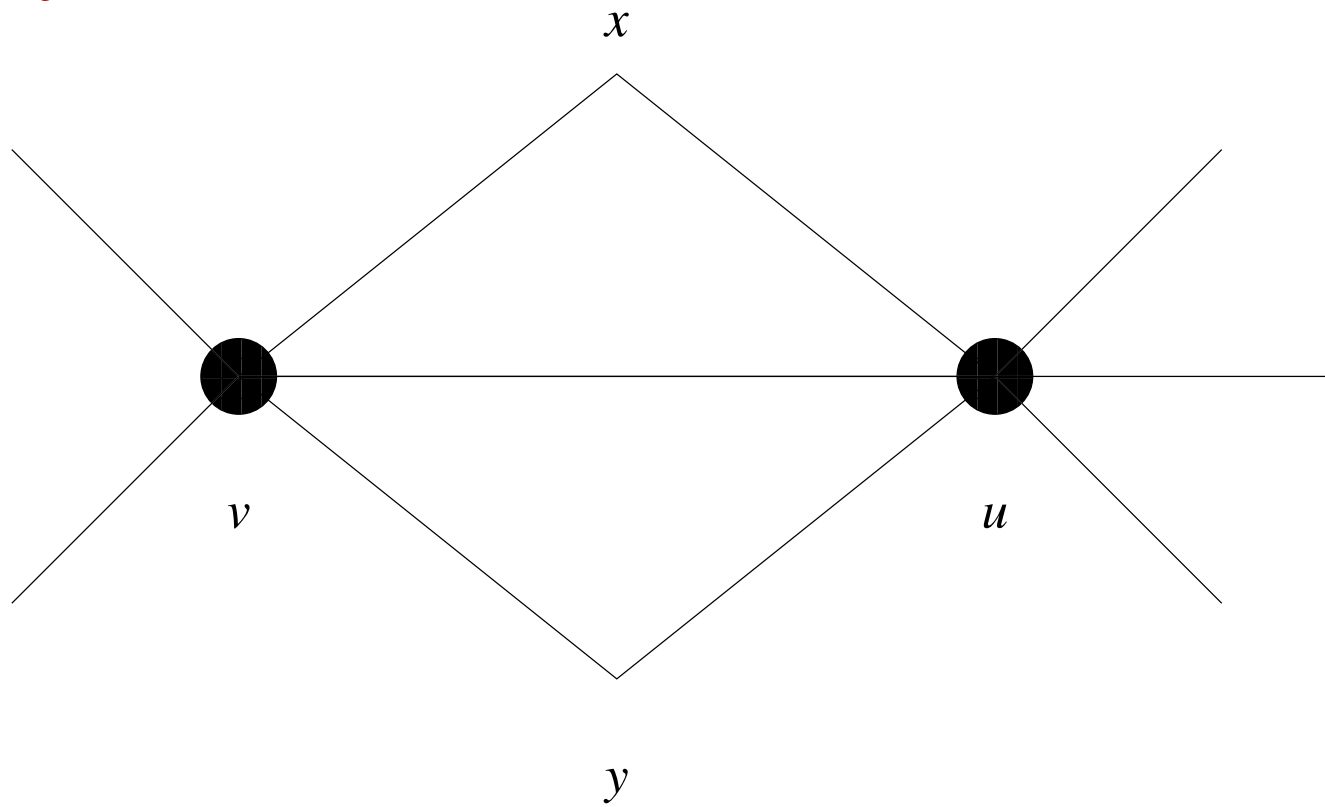
 return YES

 return NO

else

 {The fourth case of Theorem 2 applies. Details to follow...}

Der vierte Fall



```

{N(v) = {x, y, u, v1, v2} with N(u) = {x, y, v, u1, u2, u3}}
if PIS-ST(G[V \ N[v]], k - 1) then
    return YES; {Branch 1: v in IS ?}
else if PIS-ST(G[V \ N[u]], k - 1) then
5:   return YES; {Branch 2: v is not in IS, but u ?}
else if PIS-ST(G[V \ N[x]], k - 1) then
    return YES; {Branch 3: v, u is not in IS, but x ?}
else if PIS-ST(G[V \ N[y]], k - 1) then
    return YES; {Branch 4: v, u, x is not in IS, but y ?}
10: else
    {Now v, u, x, y is not in IS, so one of the vi and one of the uj must be in a
    maximal independent set.}
    for all i = 1, 2; j = 1, 2, 3 do
        if PIS-ST(G[V \ (N[vi] ∪ N[uj])], k - 2) then
            return YES
15:   return NO

```

Zur Algorithmenanalyse

Korrektheit: Folgt mit dem Satz von Borodin etc.

Laufzeitabschätzung: T erfüllt

$$T(k) \leq 4T(k-1) + 6T(k-2).$$

Das liefert die Behauptung:

$$c^k \approx 4c^{k-1} + 6^{k-2}$$

$$c^2 - 4c + 6 = 0$$

$$\leadsto c = 2 + \sqrt{10} \leq 5.17.$$

Ein komplizierteres Beispiel: PDS

PLANARE DOMINIERENDE MENGE (PDS)

Eingabe: ein planarer Graph $G = (V, E)$

Parameter: eine natürliche Zahl k

Frage: Gibt es eine dominierende Menge $D \subseteq V$ mit $|D| \leq k$?

Hinweis: Problemkern von $67k$ (sehr kompliziert)

Problem beim Verzweigen: es entstehen zwei Arten von Knoten:

- Solche, die noch abgedeckt werden müssen und
- solche, die man schon dominiert hat, die aber noch in die Dominierungsmenge aufgenommen werden sollten.

Eine Verallgemeinerung durch Annotation

PLANARE ANNOTIERTE DOMINIERENDE MENGE (PADS)

Eingabe: ein planarer Graph $G = (V, E)$ und Knotenmenge B

Parameter: eine natürliche Zahl k

Frage: Gibt es eine Menge $D \subseteq V$, $|D| \leq k$, die jeden Knoten aus B dominiert ?

Wir nennen die Knoten aus B schwarz (black) und deren Komplement W (weiß).

M.a.W.: Wir betrachten planare Schwarz-Weiß-Graphen.

Frage: Gibt es stets kleingradigen schwarzen Knoten ?

“Ohne Weiteres” nicht: Betrachte Sterngraph, bei dem nur das Zentrum schwarz.

Problemlösung Reduktionsregeln

R1: Lösche Kanten zwischen weißen Knoten.

R2: Lösche weiße Knoten vom Grad 1.

R3: Sei u ein weißer Knoten vom Grad 2 mit schwarzen Nachbarn v_1 und v_2 .

R3(a): Gibt es Kante zwischen v_1 und v_2 , so lösche u .

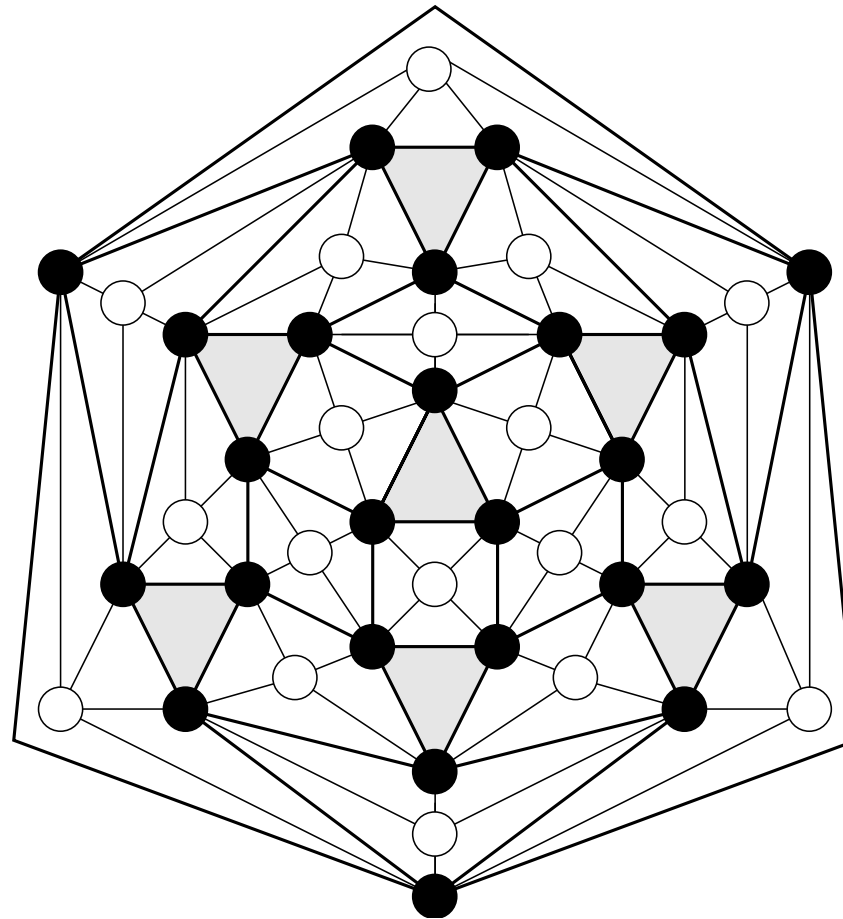
R3(b): Gibt es einen weiteren Knoten $v_3 \in N(v_1) \cap N(v_2)$, so lösche u .

R4: Sei u ein weißer Knoten vom Grad 3 mit schwarzen Nachbarn v_1 , v_2 und v_3 .

Gibt es Kanten $\{v_1, v_2\}$ und $\{v_2, v_3\}$, so lösche u .

Lemma 3 *Die Reduktionsregeln sind korrekt.*

Satz 4 *In einem reduzierten planaren Schwarz-Weiß-Graphen gibt es einen schwarzen Knoten vom Maximalgrad sieben.*



Ein irreduzibles Beispiel

Ein “echtes” planares Beispiel

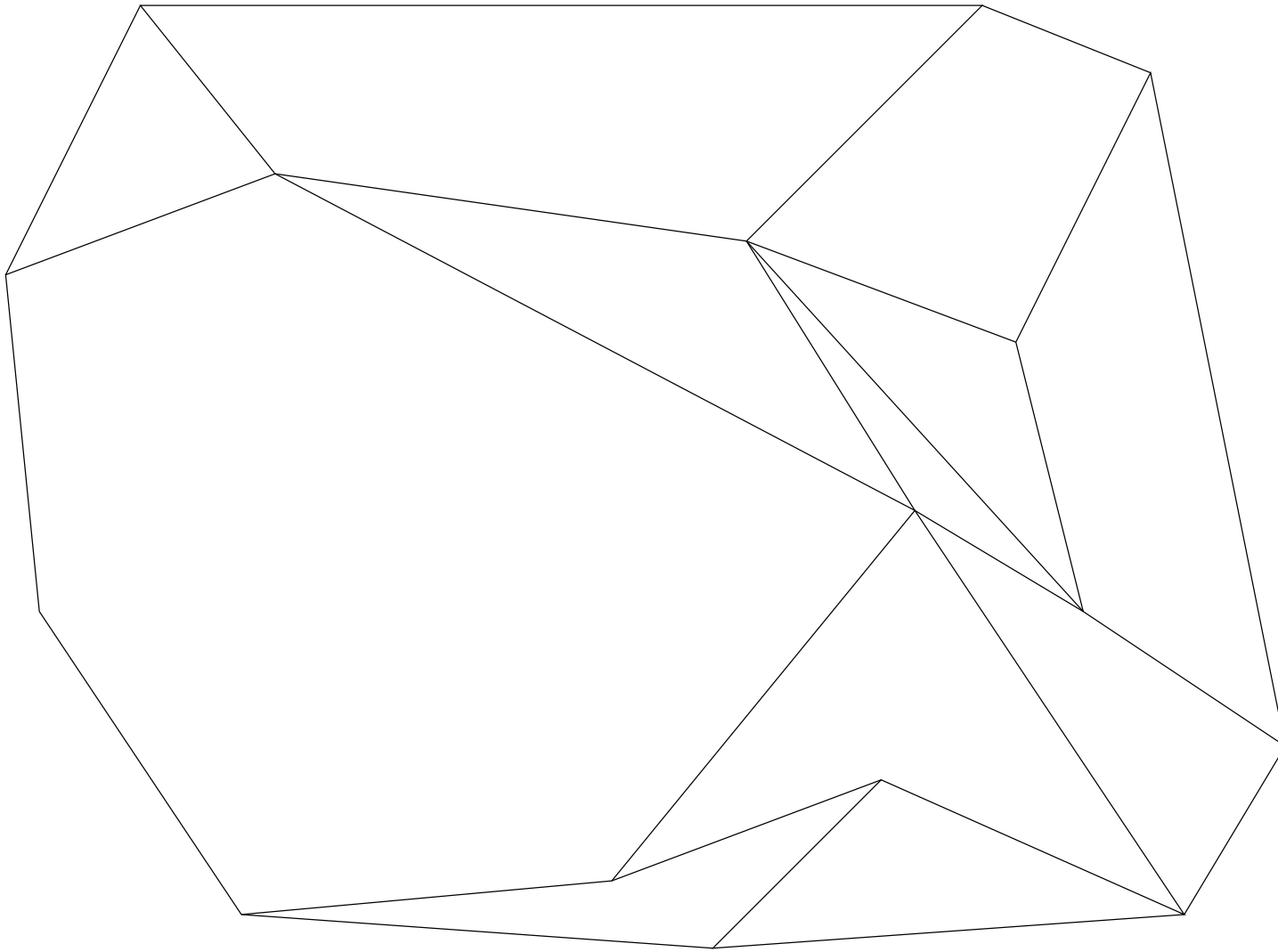
FACETTENÜBERDECKUNG (FC)

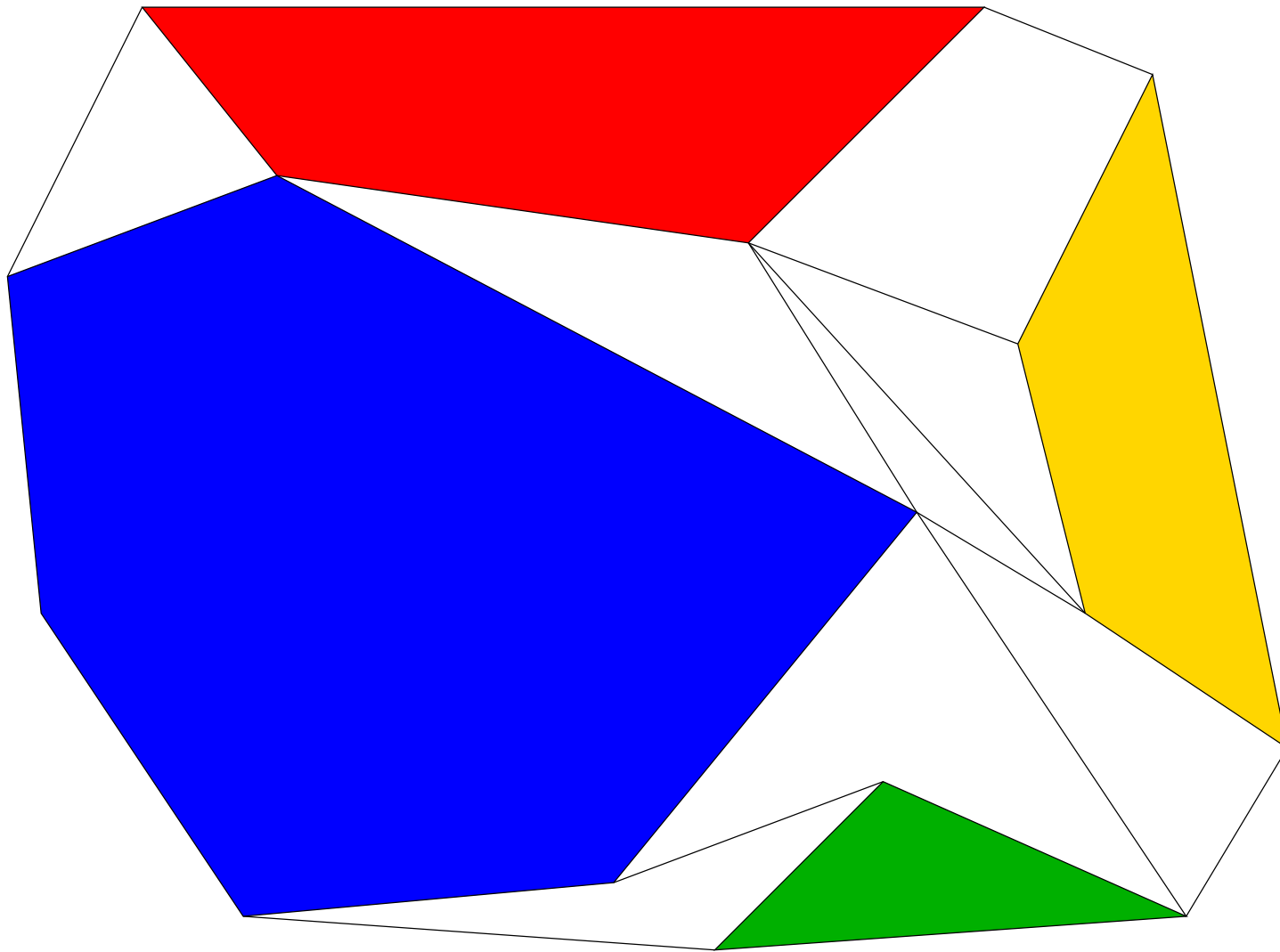
Eingabe: ein eingebetteter planarer Graph $G = (V, E)$

Parameter: eine natürliche Zahl k

Frage: Gibt es eine **Facettenüberdeckung** der Größe höchstens k ?

Hierbei ist eine Facettenüberdeckung eine Menge von Facetten, an deren Grenzlinien alle Knoten des vorgelegten eingebetteten Graphen liegen.





Idee & Problem

Verzweigen nach “kleingradigen” Knoten scheint zunächst möglich nach der Euler-Formel.

ABER: wir erhalten schon nach dem ersten Verzweigen zwei Arten von Knoten: bereits abgedeckte (marked) und noch abzudeckende (active).

Facetten, auf denen wir bereits verzweigt haben, markieren wir ebenso.

Wir brauchen aber doch nicht auf kleingradigen markierten Knoten zu verzweigen ?!

↪ **Annotierte Facettenüberdeckung**, formalisiert durch Funktionen $\mu_V : V \rightarrow \{\text{active, marked}\}$ und $\mu_F : F \rightarrow \{\text{active, marked}\}$.

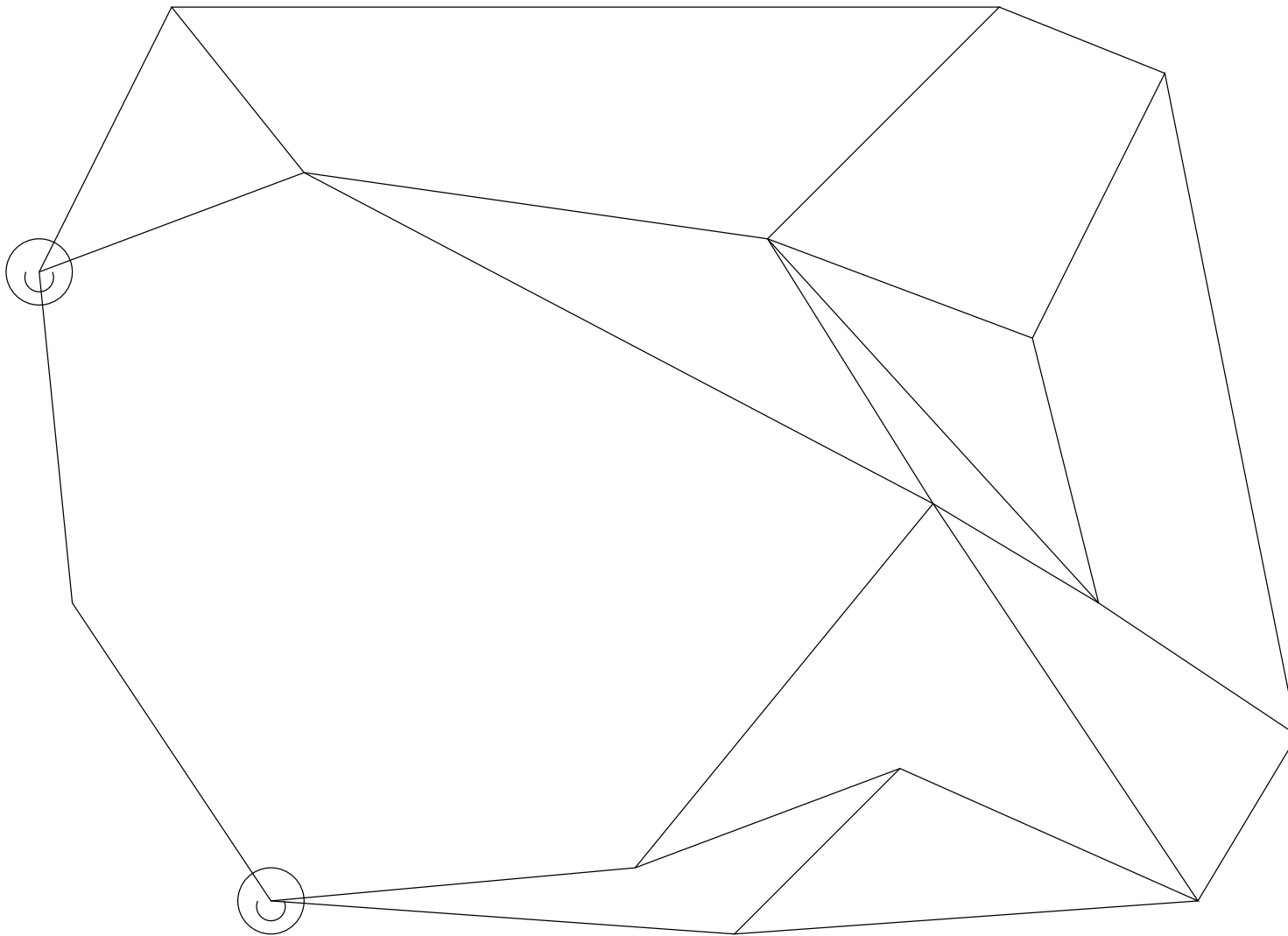
Eingangs sind alle Knoten und Facetten aktiv.

HS-Regeln als Erbschaft

$F_a(v)$: die zu v benachbarten aktiven Facetten

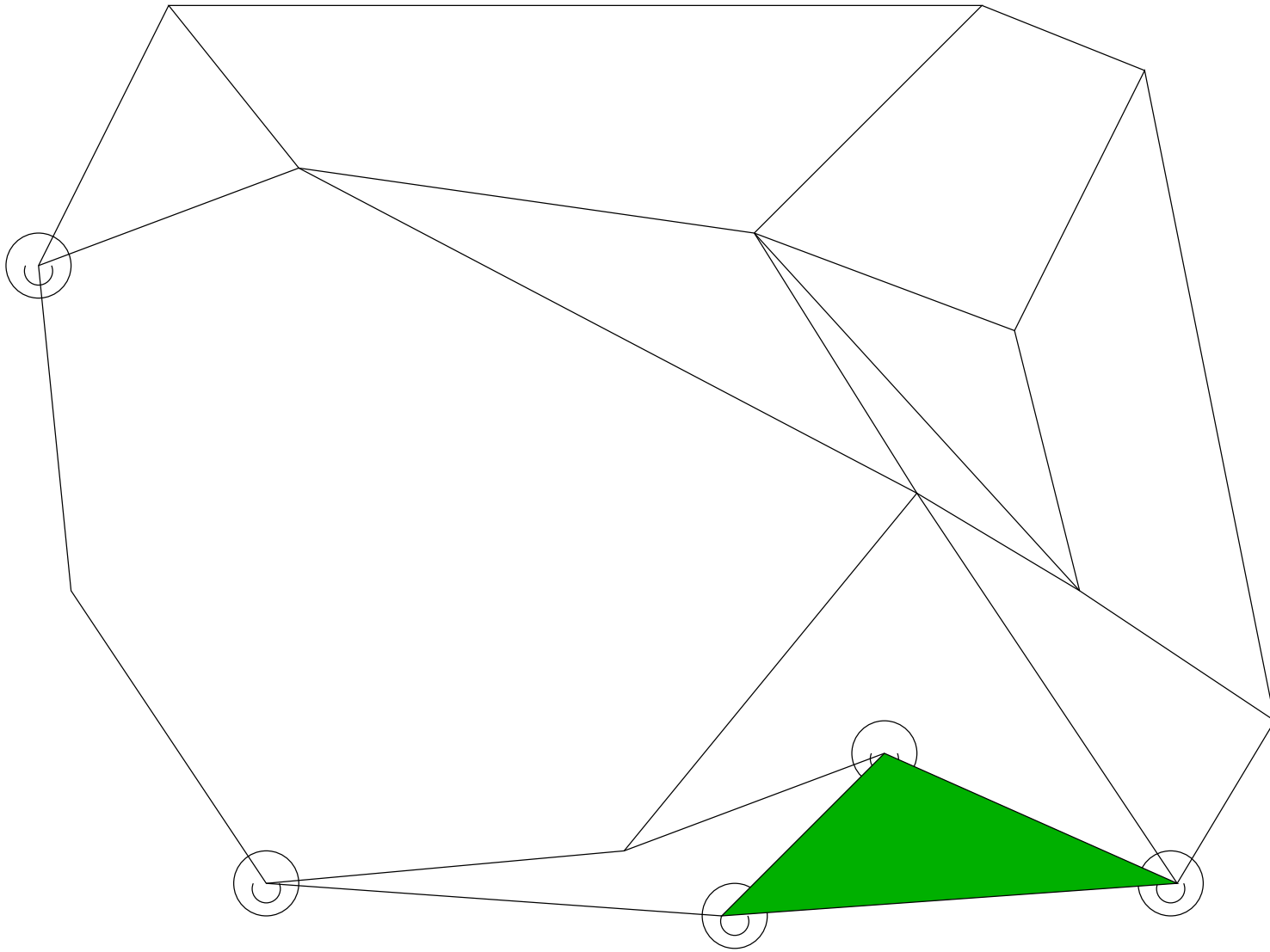
$V_a(f)$: die an f anliegenden aktiven Knoten

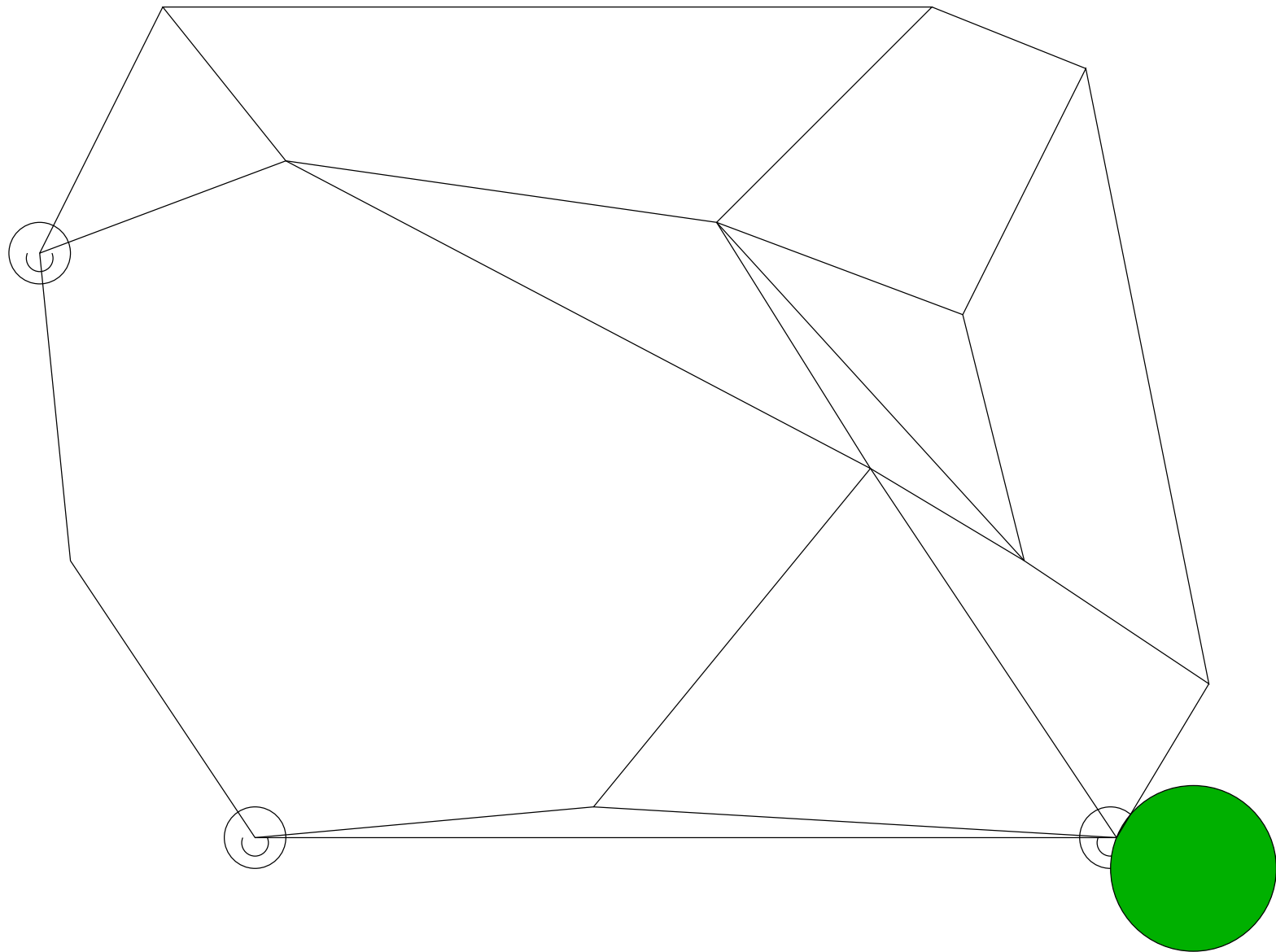
- Gilt $F_a(u) \subseteq F_a(v)$ für aktive Knoten u, v , so markiere v .
- Gilt $|F_a(v)| = 1$ und ist v aktiv, so muss $F_a(v)$ in die Facettenüberdeckung; anschließend werden v und f markiert.
- Gilt $V_a(f) \subseteq V_a(f')$ für aktive Facette f, f' , so markiere f .

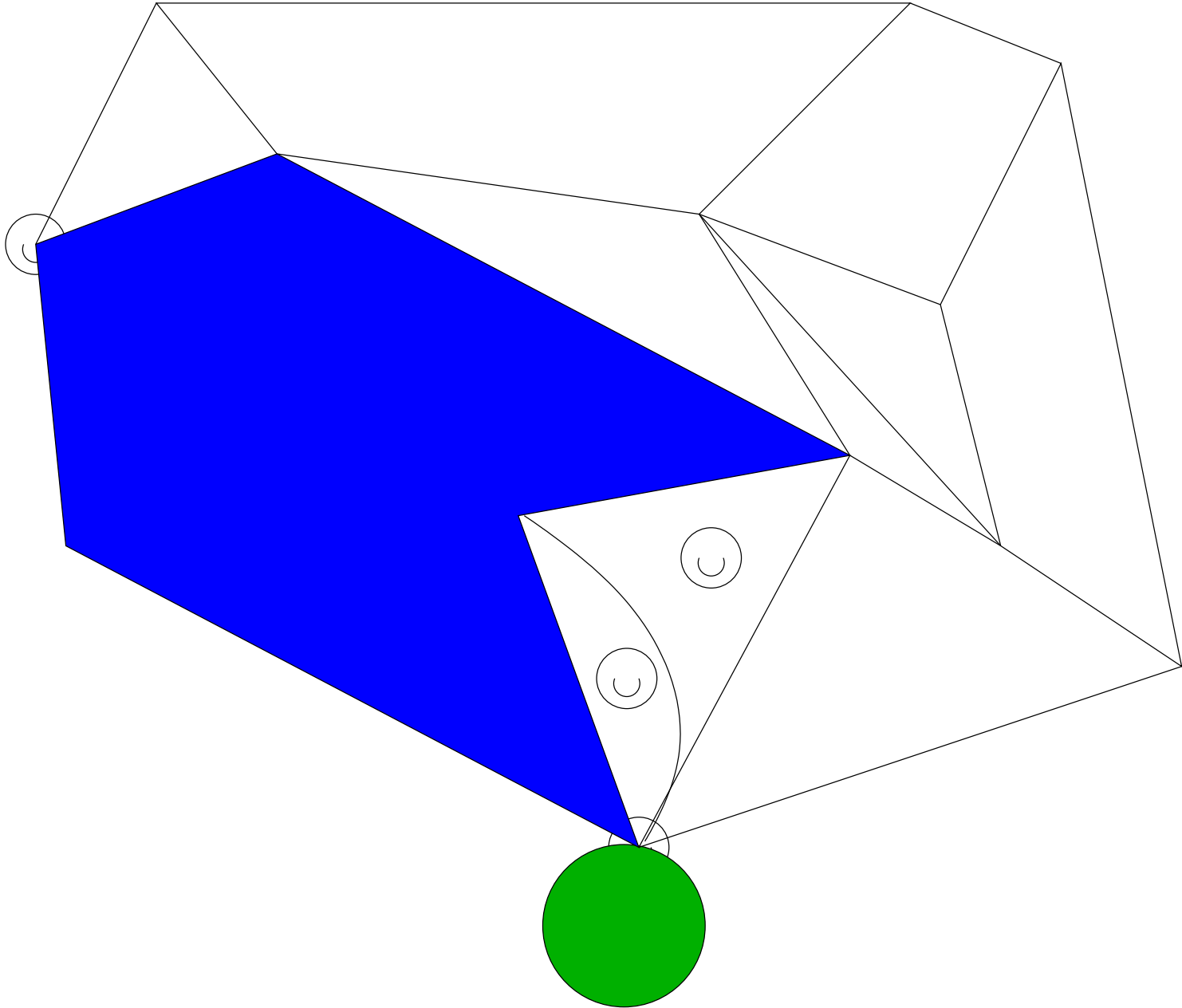


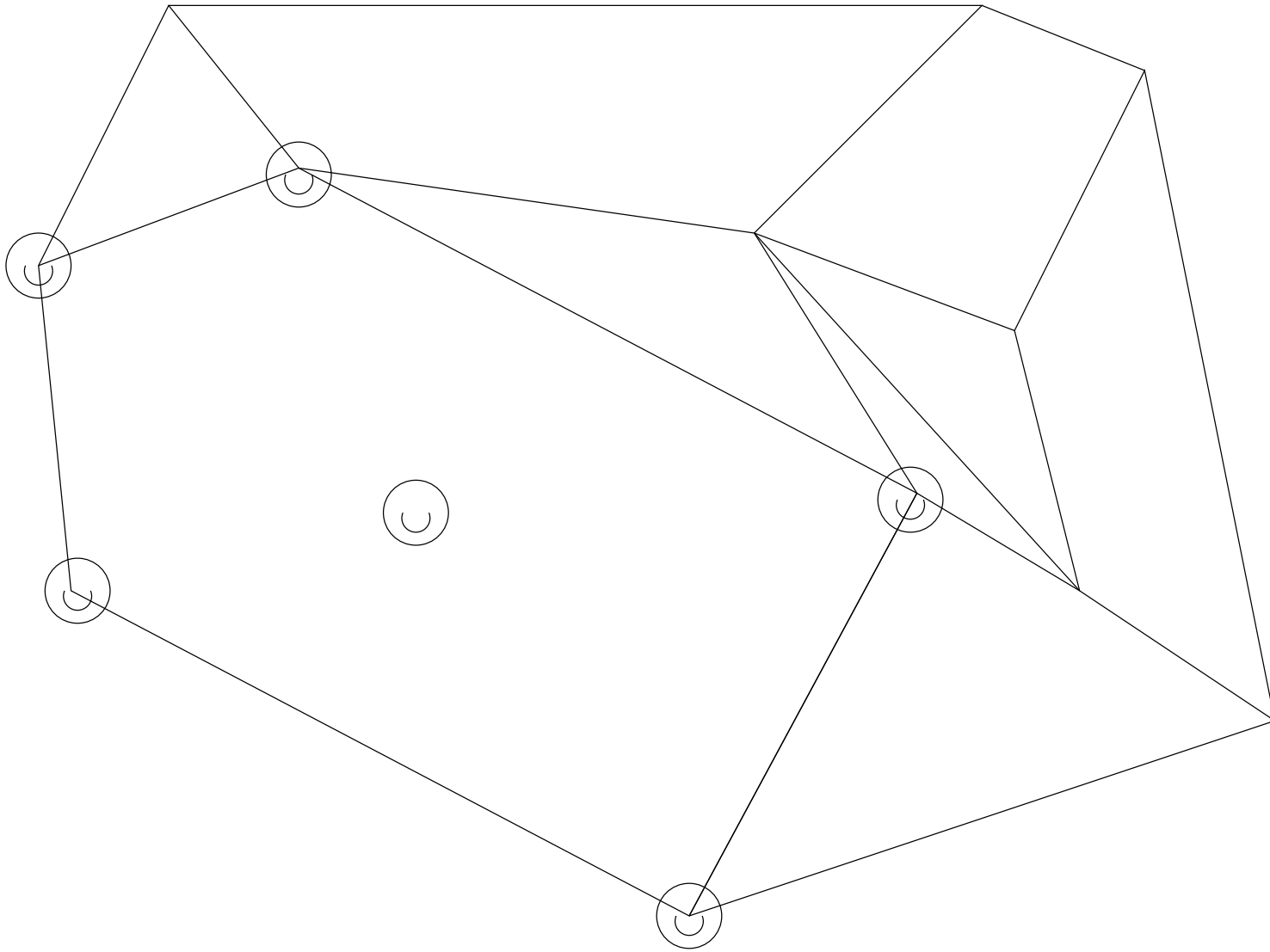
Geometrische Operationen

- Sind u und v zwei benachbarte markierte Knoten, so verschmelze u und v (wobei möglicherweise Mehrfachkanten oder Schlingen eingeführt werden).
- Ist u ein markierter Knoten mit zwei aktiven Nachbarn v, w , sodass alle drei Knoten an einer aktiven Facette f anliegen, so unterteile f in zwei Facetten durch Einführung einer neuen Kante zwischen v und w , die innerhalb von f gezeichnet werden muss (wieder kann dies Mehrfachkanten liefern). Das neue Dreieck u, v, w ist markiert, während “der Rest” von f aktiv ist.
- Lösche markierte Knoten vom Grad Eins.
- Markierte Knoten v mit $|F_\alpha(v)| = 0$ können ebenfalls gelöscht werden. So werden die v zuvor umschließenden markierten Facetten durch eine einzige markierte Facette ersetzt.
- Eine markierte Facette mit nur einem oder zwei Knoten auf ihrer Grenzlinie wird durch Löschen einer beliebig gewählten Begrenzungskante zerstört.
- Zwei markierte Facetten mit einer Grenzkante werden durch Löschen derselben zu einer neuen markierten Facette (u.U.) verschmolzen.









Algorithm 3 FC-ST: A simple search tree algorithm for annotated FC

Input(s): an annotated plane graph $G = (V, E)$ with face set F and marking functions μ_V and μ_F ,
a positive integer k

Output(s): YES iff G has an annotated face cover set $C \subseteq F$ with $|C| \leq k$

Exhaustively apply the reduction rules. $\{\rightsquigarrow G$ (etc.) as before.}

if $k < 0$ **then**

 return NO

else if $V_a = \emptyset$ **then**

5: return YES

else

 Let v be a vertex of lowest face degree in G .

 Choose $f \in F_a$ such that f is incident to v .

 Mark f and all vertices that are on the boundary of f .

10: Call the resulting marking functions μ'_V and μ'_F .

if FC-ST($G, F, \mu'_V, \mu'_F, k - 1$) **then**

 return YES

else

 Mark f , i.e., return FC-ST(G, F, μ_V, μ'_F, k)

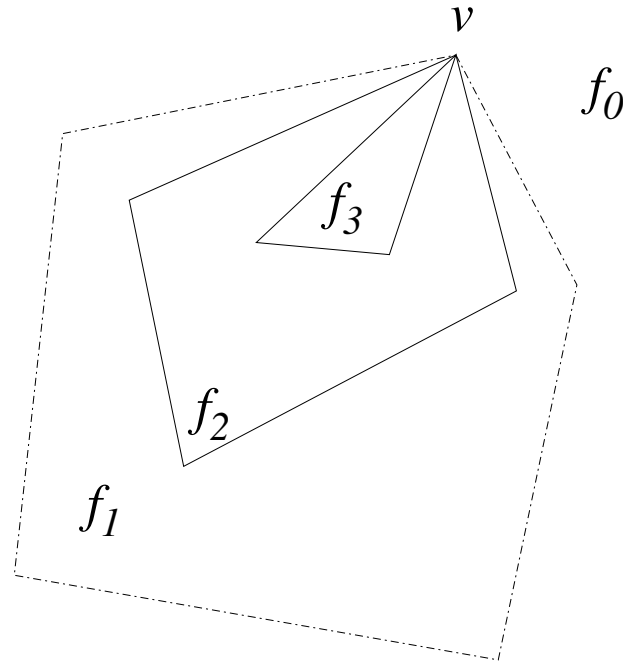
Satz 5 *Algorithmus 3 löst das AFC Problem in Zeit $\mathcal{O}^*(5^k)$.*

Zu zeigen wäre: In einem annotierten reduzierten (Multi-)graphen G gibt es stets einen Knoten, der an höchstens fünf aktiven Facetten anliegt.

Der Satz von Borodin u.a. gestattet wiederum, die Laufzeit noch deutlich zu verbessern.

Satz 6 *FC kann in Zeit $\mathcal{O}^*(4.6056^k)$ gelöst werden.*

Was sind Inseln ?



Im Beispiel: Am markierten Knoten v sind drei Schlingen (Multigraph!), die die Ebene in vier Bereiche (Inseln) aufteilen, die unabhängig voneinander gelöst werden können, da v markiert.

Weitere Aussagen

Lemma 7 *Ist $G = (V, E, V_a, F_a)$ ein annotierter, eingebetteter, reduzierter Multigraph ohne Inseln mit Facettenmenge F (als Instanz eines ANNOTATED FACE COVER Problems mit Parameter k), so gilt:*

- 1. Es gibt keinen markierten Knoten in G .*
- 2. Die einzigen degenerierten Facetten die möglicherweise existieren sind aktive Facetten f mit zwei inzidenten Knoten.*
- 3. Jedes Knotenpaar $\{u, v\}$ hat höchstens eine inzidente degenerierte Facette.*
- 4. Die beiden zu einer degenerierten Facette über Kanten angrenzenden Facetten sind markiert.*

Zum Beweis des “einfachen” Satzes:

Zu zeigen: Ist $G = (V, E, V_a, F_a)$ ein annotierter, eingebetteter, reduzierter Multigraph ohne Inseln mit Facettenmenge F (als Instanz eines ANNOTATED FACE COVER Problems mit Parameter k) gibt es stets einen Knoten mit höchstens fünf inzidenten aktiven Facetten.

Betrachte den schlichten eingebetteten Graphen $G' = (V, E')$, der aus G entsteht, indem wir (nur) eine Kante zwischen u und v zeichnen, sobald es irgendeine Kante zwischen u und v in G gibt.

Euler \rightsquigarrow In G' können wir einen Knoten vom Maximalgrad fünf finden.

Gemäß dem Lemma könnten der Kante uv in G zwei Kanten (aber nicht mehr) zwischen u und v entsprechen. Somit gäbe es höchstens 10 an v angrenzende Facetten.

Von denen können aber (mit dem Lemma) höchstens 5 aktiv sein.

Algorithm 4 An advanced search tree algorithm for ANNOTATED FACE COVER, called FC-ST-advanced

Input(s): an annotated plane graph $G = (V, E)$ with face set F and marking functions μ_V and μ_F , a positive integer k

Output(s): C if G has an annotated face cover set $C \subseteq F$ with $|C| \leq k$; NO otherwise

Exhaustively apply the reduction rules.

{The resulting instance will be also called G (etc.) as before.}

if $k < 0$ **then**

 return NO

5: **else if** $V_a = \emptyset$ **then**

 return \emptyset

else if G contains a marked vertex v whose only neighbor is v itself **then**

 Recursively compute minimum face covers C_0, \dots, C_r of the island graphs G_0, \dots, G_r

if $\exists i : C_i = \text{NO} \vee \sum_{i=0}^r |C_i| > k$ **then**

10: return NO

else

 return $\bigcup_{i=0}^r C_i$

else

 {Details on next slide}

Algorithm 5 The non-island-case

Let u be a vertex of lowest face degree in G .

{One incident face of u must be used to cover u .}

if $\deg_a(u) \leq 4$ **then**

 Choose $f \in F_a$ such that f is incident to u .

5: Mark f and all vertices that are on the boundary of f .

 Call the resulting marking functions μ'_V and μ'_F .

 Let $C := \text{FC-ST-advanced}(G, F, \mu'_V, \mu'_F, k - 1)$

if $C \neq \text{NO}$ **then**

 return $C \cup \{f\}$

10: **else**

 Mark (only) f , i.e., return $\text{FC-ST-advanced}(G, F, \mu_V, \mu'_F, k)$

else

 {Let $N(u) = \{u_1, u_2, v, w, z\}$ be the neighbors of u and similarly $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, u, w, z\}$.}

if all active faces incident with v are degenerate **then**

15: execute FC-ST-case-1

else if no active faces incident with v are degenerate **then**

 execute FC-ST-case-2

else

 {all active faces incident with u are degenerate; only one active face incident with v is degenerate}

20: execute FC-ST-case-3

Algorithm 6 The code of FC-ST-case-1

Let $G' = G \setminus \{u, v\}$ and mark the face f to which (formally) u, v belonged;

modify F, μ_v, μ_f accordingly, yielding F', μ'_v and μ'_f .

Let $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_v, \mu'_f, k - 1)$

if $C \neq \text{NO}$ **then**

 return $C \cup \{f\}$

5: **else**

for all unordered vertex pairs $\{x, y\}$ such that $x \in N(u) \setminus \{v\}$ and $y \in N(v) \setminus \{x, u\}$ **do**

 Modify μ'_v so that x and y are the only vertices of $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$ that are marked.

 Let $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_v, \mu'_f, k - 2)$

if $C \neq \text{NO}$ **then**

10: return $C \cup \{f\}$

 return NO

Algorithm 7 The code of FC-ST-case-2

Let $G' = G \setminus \{u, v\}$ and mark the face f to which (formally) u, v belonged;
modify F, μ_V, μ_F accordingly, yielding F', μ'_V and μ'_F .

for all vertices $x \in \{w, z\}$ **do**

 Modify μ'_V so that x is the only vertex of $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$ that is marked.

 Let $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_V, \mu'_F, k - 1)$

5: **if** $C \neq \text{NO}$ **then**

 return $C \cup \{f\}$

for all vertices $x \in \{u_1, u_2\}$ and $y \in \{v_1, v_2, v_3\}$ **do**

 Modify μ'_V so that x and y are the only vertices of $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$ that are marked.

 Let $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F', \mu'_V, \mu'_F, k - 2)$

10: **if** $C \neq \text{NO}$ **then**

 return $C \cup \{f\}$

return NO

Algorithm 8 The code of FC-ST-case-3

for all faces $f \in F_a(u)$, $g \in F_a(v)$ **do**

Mark f and g and all vertices in $V_a(f) \cup V_a(g)$; call the modified marking functions μ'_v and μ'_f .

Let $C := \text{FC-ST-advanced}(G', F, \mu'_v, \mu'_f, k - |\{f, g\}|)$

if $C \neq \text{NO}$ **then**

5: return $C \cup \{f, g\}$

return NO

Zusammenfassung Suchbaumentwurf

Grundidee: Gibt es **beschränkte** Kandidatenmengen, aus denen parameterreduzierend ein Element ausgewählt werden muss ?

Beispiele:

Hyperkante bei Hitting Set

Knoten-Nachbarschaft bei PIS

Dabei (wie so) oft **hilfreich**: mathematische Ergebnisse

Bsp.: Existenz kleingradiger Knoten in planaren Graphen

Noch ein Beispiel: Wie ergibt sich hier ein Suchbaumalgorithmus ?
Eine **Clique** ist ein vollständiger Teilgraph.
Ein **Cluster** ist eine Clique, die eine Zusammenhangskomponente ist.
Bei einem **Clustergraph** bildet jede Zusammenhangskomponente eine Clique.

CLUSTERKNOTENPROBLEM (CLUSTER VERTEX DELETION CVD)

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$

Parameter: $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Knotenmenge $D \subseteq V$, sodass $|D| \leq k$ und $G - D$ ist ein Clustergraph ?

Lemma 8 *Enthält G einen induzierten P_2 , so ist G kein Clustergraph (und umgekehrt).*

Frage: Wie sehen also geeignete Kandidatenmengen aus (zum Verzweigen) ?

Zusammenfassung der Grundtechniken

Kerne (Datenreduktion) kennzeichnen FPT

Praktisch sind sie alleine eher Heuristiken zum Lösen harter Probleme.

In Kombination mit guten Suchbaumstrategien liefert dies die praktisch besten parameterisierten Algorithmen.

Suchbäume alleine scheinen nicht FPT zu kennzeichnen (**offene Frage !**).

Suchbäume liefern meist den entscheidend(verbessernd)den Anteil für gute Laufzeitabschätzungen.