Parameterisierte Algorithmen

WS 2009/10 in Trier

Henning Fernau

fernau@uni-trier.de

Parameterisierte Algorithmen Gesamtübersicht

- Einführung
- Grundbegriffe
- Problemkerne
- Suchbäume
- Graphparameter
- Weitere Methoden
- Komplexitätstheorie—parameterisiert

Themen für letzte Woche und heute (und noch etwas nächste Woche):

- Win-Win
- iteratives Verbessern
- Farbkodierungen
- Wohl-Quasi-Ordnungen

Quasiordnungen: Definitionen

Eine reflexive transitive Relation auf S, oft geschrieben $\leq$, heißt auch Quasiordnung.

Gilt $x \leq y$ und $y \leq x$, so heißen x und y auch äquivalent, i.Z. $x \equiv y$.

Eine Halbordnung ist eine antisymmetrische Quasiordnung.

Die Menge $S/\equiv$ der von der Quasiordnung $\leq$ vorgegebenen Äquivalenzklassen ist durch die durch $\leq$ auf $S/\equiv$ induzierte Quasiordnung sogar halbgeordnet.

Gilt weder $x \leq y$ noch $y \leq x$, so heißen x, y unvergleichbar, i.Z. $x|y$.

$F \subseteq S$ heißt Filter gdw. $(x \in F \wedge x \leq y) \implies y \in F$.

Der von $X \subseteq S$ erzeugte Filter ist $F(X) = \{y \in S \mid \exists x \in X : x \leq y\}$.

$I \subseteq S$ heißt Ideal gdw. $(y \in I \wedge x \leq y) \implies x \in I$.

Das von $Y \subseteq S$ erzeugte Ideal ist $I(Y) = \{x \in S \mid \exists y \in Y : x \leq y\}$.

Ein Filter (Ideal) heißt endlich erzeugt gdw. es gibt endliche Menge, die den Filter (das Ideal) erzeugt.

(Wohl-)Quasiordnungen: Es sei $A = (a_0, a_1, \dots)$ eine (unendliche) Folge von Elementen einer Quasiordnung $(S, \leq)$.
A heißt schlecht gdw. $\forall i, j : (i < j) \implies \neg(a_i \leq a_j)$.
A heißt aufsteigend oder Kette gdw. $\forall i, j : (i < j) \implies (a_i \leq a_j)$.
A heißt streng absteigend gdw. $\forall i, j : (i < j) \implies (a_j \leq a_i \wedge a_j \neq a_i)$.
A heißt Antikette gdw. $\forall i, j : (i \neq j) \implies (a_i | a_j)$.
$(S, \leq)$ heißt Noethersch gdw. S enthält keine streng absteigenden Folgen.
$(S, \leq)$ hat die endliche Baseneigenschaft gdw. jeder Filter ist endlich erzeugt.
Eine Quasiordnung mit endlicher Baseneigenschaft heißt Wohlquasiordnung.

Satz 1 *Die folgenden Aussagen sind für Quasiordnungen $(S, \leq)$ äquivalent:*
1. S enthält keine schlechten Folgen.
2. Jede unendliche Folge in S enthält eine unendliche Kette.
3. $(S, \leq)$ ist Noethersch und S enthält keine unendliche Antikette.
4. $(S, \leq)$ hat die endliche Baseneigenschaft.

Wohlquasiordnungen: eine algorithmische Sicht

Es sei $(S, \leq)$ eine Wohlquasiordnung.

ABOVE$[x]$

Eingabe: $y \in S$

Parameter: $x \in S$

Frage: Gilt $x \leq y$?

Wohlquasiordnungsprinzip:

Lässt sich ABOVE$[x]$ in Polynomzeit lösen für jedes feste x, so kann man auch für jeden Filter F die Frage $y \in F$ in Polynomzeit lösen.

F hat nämlich eine endliche Basis B, da $(S, \leq)$ wohlquasigeordnet.

$y \in F$ gdw. für irgendein Basiselement $b \in B$: $b \leq y$.

Wohlquasiordnungsprinzip dual betrachtet.

Satz 2 F *ist ein Filter in der Quasiordnung* $(S, \leq)$ *gdw.* $I = S \setminus F$ *ist ein Ideal.*

$O \subseteq S$ heißt Ausschlussmenge (obstruction set) des Ideals I gdw. $(x \in I) \iff (\forall y \in O : \neg(y \leq x))$. M.a.W.: O ist Ausschlussmenge gdw. $I = S \setminus (F(O))$.
(Duales) Wohlquasiordnungsprinzip:
Lässt sich ABOVE$[x]$ in Polynomzeit lösen für jedes feste x, so kann man auch für jedes Ideal die Frage $y \in I$ in Polynomzeit lösen.
Da nämlich $(S, \leq)$ Wohlquasiordnung, gibt es eine endliche Basis für den Filter $S \setminus I$, d.h., I besitzt eine endliche Ausschlussmenge.

Quasiordnungen: Beispiele

Die Identität ist eine Quasiordnung auf jeder Menge; genau für endliche Mengen ist sie Wohlquasiordnung.

$(\mathbb{N}, \leq)$ mit dem “üblichen Kleiner-Gleich” ist eine Wohlhalbordnung.

$(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ mit $x \leq_{\mathbb{Z}} y$ gdw. $|x| \leq |y|$ ist eine Wohlquasiordnung.

$\equiv_{\mathbb{Z}}$ sei abgeleitete Äquivalenzrelation: $x \equiv_{\mathbb{Z}} y \iff (x \leq_{\mathbb{Z}} y \wedge y \leq_{\mathbb{Z}} x)$

$\mathbb{Z}/\equiv_{\mathbb{Z}}$ ist zu $(\mathbb{N}, \leq)$ quasiordnungsisomorph.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ mit dem “üblichen Kleiner-Gleich” ist eine Halbordnung, die nicht wohl ist.

$(\mathbb{Q}^+, \leq)$ ist (aus anderen Gründen) ebenso eine nicht wohle Halbordnung.

Ist die Teilerhalbordnung auf $\mathbb{N}$ wohl ?

Auf Σ^* definiert $x \prec y$ gdw. $|x| \leq |y|$ eine Quasiordnung. Ist sie wohl oder Halb-?

Jedes $L \subseteq \Sigma^*$ definiert eine weitere Quasiordnung auf Σ^* durch: $x \leq_L y$ gdw. $\forall u, v \in \Sigma^* (uyv \in L \implies uxv \in L)$.

Satz 3 *L ist regulär gdw. $\leq_L$ ist Wohlquasiordnung.*

Quasiordnungen: Das Lemma von Higman

Es sei $(S, \leq)$ eine Quasiordnung.

Auf der Menge S^* der endlichen Folgen aus Elementen von S können wir wie folgt eine Quasiordnung beschreiben:

$s := (s_1, \ldots, s_n) \leq t := (t_1, \ldots, t_m)$ gdw. es gibt eine injektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

(1) $i \leq f(i)$ und (2) $s_i \leq t_{f(i)}$. (Achtung: zwei verschiedene $\leq$!)

Ist $\leq$ die Identität, so heißt s auch Teilfolge von t oder verstreutes Teilwort (scattered subword).

Lemma 4 (Higman) *Ist $(S, \leq)$ eine Wohlquasiordnung, so auch $(S^*, \leq)$.*

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ formale Sprache, so gibt es also endliche Sprache $F \subseteq L$, sodass es zu jedem $w \in L$ ein verstreutes Teilwort von w in F gibt.

Quasiordnungen: Das Lemma von Dickson

Die Halbordnung $(\mathbb{N}, \leq)$ lässt sich komponentenweise zu einer Halbordnung auf $\mathbb{N}^k$ für jedes k erweitern.
Das bedeutet: $(x_1, \dots, x_k) \leq (y_1, \dots, y_k)$ gdw. $\forall i : x_i \leq y_i$

Lemma 5 (Dickson) $(\mathbb{N}^k, \leq)$ *ist eine Wohlordnung.*

Insbesondere gilt: Eine Menge paarweise unvergleichbarer Vektoren ist endlich.
Sonst gäbe es nämlich unendliche Antiketten in $(\mathbb{N}^k, \leq)$.
Genauer gibt es eine Schranke $f(k)$ auf die mögliche Größe von V.

Facility Location: eine mögliche Anwendung

FILIALERÖFFNUNGSPROBLEM (FL)
Eingabe: Ein bipartiter Graph $B = (F \uplus C, E)$, bestehend aus einer Menge F potentieller Filialstandorte und einer Menge C von Kunden(orten), sowie eine Kantenrelation E,
wobei $\{f, c\} \in E$ bedeutet, dass c von der Filiale am Standort f bedient werden könnte;
schließlich Gewichtsfunktionen $\omega_F : F \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $\omega_E : E \to \mathbb{R}_{\geq 1}$
Parameter: $k \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Filialstandortsmenge $F' \subseteq F$ sowie Möglichkeiten $E' \subseteq E$, um alle Kunden zu bedienen so dass
(1) $\forall f \in F(f \in F' \iff \exists e \in E'(f \in e))$,
(2) $\forall c \in C \exists e \in E'(c \in e)$ und
(3) $\sum_{f \in F'} \omega_F(f) + \sum_{e \in E'} \omega_E(e) \leq k$?

ω_F modelliert die Kosten einer Filialeröffnung und ω_E die Kosten des laufenden Betriebs.
Für Mitgliedschaft in *FPT* ist $\omega_E(e) \geq 1$ wesentlich, jedoch $\omega_F(f) \geq 0$ wäre möglich.

Facility Location: Matrixdarstellung

FACILITY LOCATION (MATRIXFORMULIERUNG)
Eingabe: Eine Matrix $M \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{(n+1)\times m}$, indiziert als $M[0\dots n][1\dots m]$.
Parameter: $k \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1,\dots,m\}$ von Spalten und eine Funktion $s : \{1,\dots,n\} \to C$, sodass $\sum_{f\in C}(M[0,f] + \sum_{c:s(c)=f} M[c,f]) \leq k$?

Die Funktion s ist die Bedienfunktion, die angibt, welche Kunden durch welche Filiale bedient werden.
Die nullte Zeile von M enthält die Filialeröffnungskosten, die anderen Zeilen die Bedienkosten, d.h., $M[c,f]$ gibt an, wie teuer es ist, Kunde c von Filialstandort f aus zu bedienen.
Ein Filialstandort f ist beschrieben durch den Vektor $v_f = M[0\dots n][f]$.

Facility Location: Reduktionsregeln

R0: Gibt es mehr als k Kunden, so handelt es sich um eine NEIN-Instanz.
Denn: jede Kundenbedienung verursacht Kosten von wenigstens Eins nach Voraussetzung.

Matrixformulierung von R0: Erfüllt eine Instanz (M, k) mit $M \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{(n+1)\times m}$ $m > k$, so handelt es sich um eine NEIN-Instanz.

R1: Gilt für zwei Filialstandorte f und g: $v_f \leq v_g$, so lösche g; der Parameter bleibt unverändert.

Satz 6 *Nach erschöpfender Anwendung von R0 und R1 hat die Instanz eine Größe von* $f(k)$*; das Filialeröffnungsproblem liegt also in FPT.*

Da die Instanz R0-reduziert ist, enthält M nicht mehr als k Zeilen (Kunden).
Da die Instanz R1-reduziert ist, sind die Vektoren v_f paarweise unvergleichbar.
Nach dem Lemma von Dickson gibt es also nur endliche viele, höchstens $h(k)$ viele, Vektoren.
Daher ist die Instanz nur in k groß (Kern!).

Quasiordnungen auf Graphen

Eine topologische Einbettung eines Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ in einen Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$ ist eine Injektion f von V_1 in V_2, sodass Kanten uv auf zwischenknotendisjunkte Wege in G_2 abgebildet werden,
Wir schreiben auch $G_1 \leq_{top} G_2$ für die so definierte topologische Ordnung.

Lemma 7 $\leq_{top}$ *ist eine Halbordnung auf der Menge der endlichen Graphen, die aber nicht Wohl- ist.*

Dennoch gibt es einen sehr bedeutenden und bekannten Satz über endliche Ausschlussmengen:

Satz 8 (Kuratowski) *Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ bilden eine endliche Ausschlussmenge für das Ideal der planaren Graphen in der topologischen Ordnung.*

Quasiordnungen auf Graphen

Eine Kennzeichnung von $\leq_{top}$: $G_1 \leq_{top} G_2$ gdw. G_1 kann aus G_2 durch eine Folge der nachfolgenden Operationen dargestellt werden:
(1) Löschungen: Lösche Knoten oder Kanten.
(2) Grad-2-Kontraktionen: Die Kontraktion einer Kante xy erhält man durch Identifizierung von x mit y. Eine Grad-2-Kontraktion fordert darüber hinaus, dass x oder y Grad zwei besitzen.
Durch Fallenlassen der (unnatürlichen ?) Grad-2-Forderung erhalten wir:
G_1 ist ein Minor von G_2, i.Z., $G_1 \leq_{minor} G_2$ gdw. G_1 kann aus G_2 durch eine Folge von Löschungen und Kontraktionen erhalten werden.

Satz 9 (Kuratowski) *Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ bilden eine endliche Ausschlussmenge für das Ideal der planaren Graphen in der Minoren-Ordnung.*

Quasiordnungen auf Graphen

Eine der historischen Wurzeln parameterisierter Algorithmen ist folgender grundlegender Satz von Robertson und Seymour:

Satz 10 *Die Menge der endlichen Graphen ist wohlquasigeordnet durch die Minorenordnung.*

Der Beweis erstreckt sich auf mehr als 20 Zeitschriftenartikel und benötigt u.a. “nebenbei” die Entwicklung des Begriffs der Baumweite etc. Der Satz wurde in den 30er Jahren von Wagner als Vermutung geäußert und erst ca. 50 Jahre später bewiesen.

Quasiordnungen auf Graphen

Robertson und Seymour behandelten folgendes Problem in ihren Arbeiten:
MINORENTEST

Eingabe: Graphen G_1 und G_2
Parameter: $|G_2|$
Frage: Gilt $G_2 \leq_{\mathrm{minor}} G_1$?

Satz 11 *Das Problem des Minorentests lässt sich in Zeit $\mathcal{O}^*(f(|G_2|))$ lösen und liegt daher in FPT.*

Das in der $\mathcal{O}^*$-Notation versteckte Polynom hat Grad drei.
Dennoch ist der Algorithmus höchst unpraktisch, da die multiplikativen Konstanten sich im Bereich 2^{500} bewegen...

Quasiordnungen auf Graphen: Eine Anwendung

GRAPH GENUS
Eingabe: Graph G
Parameter: natürliche Zahl k
Frage: Lässt sich G auf einer Fläche vom Geschlecht k einbetten ?

Dabei hat die Kugeloberfläche Geschlecht null, der Torus ("Autoreifen") Geschlecht eins (einen "Henkel"), etc.

Folgerung 12 GRAPH GENUS *ist in FPT.*

Das Ideal der Graphen vom Geschlecht k hat nämlich eine endliche Ausschlussmenge bezüglich der Minorenordnung. Wir müssen daher für jedes k $g(k)$ viele Minorentests durchführen. Ist $h(k)$ die Größe des größten Ausschluss-Minors für das Geschlecht k, so lässt sich das Problem insgesamt in Zeit $\mathcal{O}(|G|^3 g(k) f(h(k)))$ lösen (f wie vorige Folie).

Quasiordnungen auf Graphen: Mehr Anwendungen

BAUMWEITE
Eingabe: Graph G
Parameter: natürliche Zahl k
Frage: Besitzt G Baumweite höchstens k ?

Lemma 13 (Robertson / Seymour) *Die Graphen mit Baumweite höchstens k bilden ein Ideal in der Minorenordnung.*

Folgerung 14 (Robertson / Seymour) BAUMWEITE *ist in FPT.*

Quasiordnungen auf Graphen: Mehr Anwendungen

Lemma 15 *Die Graphen mit einer Knotenüberdeckung von höchstens* k *Knoten bilden ein Ideal in der Minorenordnung.*

Folgerung 16 VERTEX COVER *ist in FPT.*

Lemma 17 *Die Graphen mit einem Feedback Vertex Set von höchstens* k *Knoten bilden ein Ideal in der Minorenordnung.*

Folgerung 18 FEEDBACK VERTEX SET *ist in FPT.*

Nicht alle Grapheigenschaften implizieren Ideale in der Minorenordnung.
Frage: Warum bilden die Graphen mit einer Dominierungsmenge von höchstens k Knoten kein Ideal in der Minorenordnung ?

Quasiordnungen auf Graphen: Mehr Anwendungen
Es sei Π eine Grapheigenschaft, die ein Ideal in der Minorenordnung liefert.

k-KNOTEN-LÖSCHEN (Π)
Eingabe: Graph $G = (V, E)$
Parameter: natürliche Zahl k
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq V$, $|C| \leq k$, sodass $G - C$ Eigenschaft Π besitzt?

Π_k sei die Menge der JA-Instanzen zu obigem Problem.

Satz 19 *Mit Π ist auch Π_k für jedes k ein Ideal in der Minorenordnung.*

Folgerung 20 k-KNOTEN-LÖSCHEN (Π) *liegt in FPT für jedes Minorenideal Π.*

Beispiele für Π: die kantenlosen Graphen, die Wälder, die planaren Graphen...
Frage: Was bedeutet Π_k in jedem der genannten Fälle ?

Quasiordnungen auf Graphen: Philosophisches I

Der Wohlquasiordnungsansatz ist in verschiedener Hinsicht nicht-konstruktiv:
(1) Der Satz von Robertson-Seymour zeigt die Existenz von einer Schar von $\mathcal{O}(f(k)n^3)$-Algorithmen: zu jedem k gibt es eine Ausschlussmenge der Größe $g(k)$. Es gibt aber keine Methode (geschweige denn einen Algorithmus), der zu k die zugehörige Ausschlussmenge $A(k)$ bestimmt.
(2) Selbst wenn die Ausschlussmenge in einem konkreten Fall bekannt ist (für einige spezielle Probleme und einige kleine k ist dies der Fall, siehe z.B. der Satz von Kuratowski), so hätten wir zwar einen konkreten Polynomzeitalgorithmus für das konkrete Entscheidungsproblem, aber "eigentlich" wird ja immer nach gewissen Knotenmengen (o.ä.) einer gewissen Größe (abhängig von k) gesucht. Der Satz von Robertson-Seymour liefert uns keinerlei Anhaltspunkte, wie diese Menge zu finden wäre, selbst wenn wir wüssten, dass es sie gibt. . .

Quasiordnungen auf Graphen: Philosophisches II

Die Wohlquasiordnungsmethode bietet dennoch etliche Vorteile:
(1) Sie erlaubt oft eine rasche Klassifikation eines Problems.
(2) Weiß man erst einmal mit dieser Methodik, dass ein Problem in *FPT* liegt, so lassen sich hiervon ausgehend (mehr oder minder) leicht "bessere" parameterisierte Algorithmen finden.
Immerhin weiß man, in welche Richtung man denken muss !
Beispiel 1: Für das Filialeröffnungsproblem war es nicht schwer, nach der ersten Klassifikation einen Algorithmus anzugeben, der durch dynamisches Programmieren auf Mengen eine sehr viel bessere Laufzeit gewährt als das Lemma von Dickson.
Beispiel 2: Bei FEEDBACK VERTEX SET hat es jedoch über ein Jahrzehnt gedauert, bis (nach Entdeckung der Methode des iterativen Verbesserns) zwei Gruppen unabhängig voneinander einen besseren Algorithmus angaben als den durch die Wohlquasiordnungsklassifikation gegebenen.

Was ist alles parameterisiert (un-)möglich ?

k-FÄRBUNG

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Parameter: natürliche Zahl k

Frage: Gibt es eine Partition von V in $C_1, \ldots, C_k$, sodass jede Farbklasse C_i eine unabhängige Menge ist ?

Wäre dies Problem in *FPT*, so gäbe es einen Polynomzeitalgorithmus für $k = 3$. Das Problem der Dreifärbbarkeit ist jedoch *NP*-hart.

Satz 21 *Falls* $\mathrm{NP} \neq \mathrm{P}$*, so liegt* k-FÄRBUNG *nicht in FPT.*

Kleine Kerne I

Sei $s(I)$ ein Instanzgrößenmaß, für das gilt:
Probleme mit $s(I) = \mathcal{O}(1)$ lassen sich in konstanter Zeit lösen.
Solche Instanzgrößenmaße nennen wir zulässig.

Satz 22 *Es sei (P, k) ein parameterisiertes Problem und s ein zulässiges Instanzgrößenmaß.
Gibt es eine Kernreduktion, die zu (I, k) eine Instanz (I', k') liefert mit $s(I') \leq \alpha k$ für eine Konstante $\alpha < 1$, so liegt (P, k) in P.*

Nach $\log_\alpha(k)$ Aufrufen der (Polynomzeit-)Kernreduktion gilt $s(I') = \mathcal{O}(1)$ für die schließlich erhaltene Instanz (I', k'). Das liefert die Behauptung.
Beispiel: Das übliche Instanzgrößenmaß für das Knotenüberdeckungsproblem ist die Knotenanzahl; dieses Maß ist zulässig. Es gibt also keinen Problemkern der Größe $0,9999 \cdot k$ für VERTEX COVER, falls $NP \neq P$.

Kleine Kerne II

Ist s ein zulässiges Instanzgrößenmaß für das Problem (P, k), so heißt $k_d = s(I) - k$ der duale Parameter und demgemäß (P_d, k_d) das duale Problem.
Beispiel: VERTEX COVER und INDEPENDENT SET sind dual bzgl. des Knotenanzahlmaßes.

Satz 23 *Es seien (P, k) und (P_d, k_d) duale Probleme bzgl. des zulässigen Maßes s. Gibt es eine Kernreduktion r, die zu (I, k) eine Instanz (I', k') liefert mit $s(I') \leq \alpha k$ und eine Kernreduktion r_d, die zu (I, k_d) eine Instanz (I'_d, k'_d) liefert mit $s(I'_d) \leq \alpha_d k_d$, so gilt $(\alpha - 1)(\alpha_d - 1) \geq 1$ oder $P = NP$.*

Betrachte nämlich folgenden Algorithmus; er liefert Instanz $\tilde{I}$ mit $s(\tilde{I}) < s(I)$.
if $k \leq \frac{\alpha_d}{\alpha+\alpha_d} s(I)$ **then** compute $\tilde{I} := r(I, k)$; **else** compute $\tilde{I} := r_d(I, s(I) - k)$.

Beispiel: Für INDEPENDENT SET auf planaren Graphen gibt es keinen Kern kleiner als $2k_d$ unter der Annahme $NP \neq P$, denn wir kennen $2k$-Kern für VC.

Polynomielle Kerne

Seit 2008 gibt es etliche Arbeiten, in denen gezeigt wird, dass unter gewissen Annahmen (meist schwächer als $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, typischerweise über den Kollaps der Polynomialzeithierarchie auf die dritte Stufe) nachweisen, dass für bestimmte Probleme KEINE polynomiell kleinen Kerne existieren können. Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Parameterwert durch die Kernbildung nicht ansteigt.

Beispiele (ohne Beweis):

CVC (Connected Vertex Cover)
TVC (Total Vertex Cover)

und viele mehr.

Ein konkretes Beispiel

Das Problem, in einem vorgelegten Graphen G einen Pfad der Länge k zufinden, ausgehend von einem ausgezeichneten Knoten v, liegt sicher in *FPT*, ist aber *NP*-hart.
(G, v, k) ist JA-Instanz genau dann, wenn $G_u = (G - v, u, k - 1)$ JA-Instanz ist für ein $u \in N(v)$.
Bilde neue Instanz $(\tilde{G}, \tilde{v}, k - 1)$, indem die Graphen von G_u (für alle $u \in N(v)$) zunächst disjunkt vereinigt werden und dann die ausgezeichneten Knoten u alle zu $\tilde{v}$ identifiziert werden.
(G, v, k) ist JA-Instanz genau dann, wenn $(\tilde{G}, \tilde{v}, k - 1)$, JA-Instanz ist.
Offensichtlich geht diese Transformation in Polynomzeit.
Gäbe es hierfür einen polynomiellen Kern, so gäbe es hierzu in Polynomzeit zu konstruierende äquivalente Instanz (G', v', k') mit $k' < k$.
Nach höchstens k solcher Schritte hätten wir ein triviales Problem erhalten, also insgesamt das vorgelegte Problem in Polynomzeit gelöst!