Fernau / Meister
Universität Trier

Wintersemester 2011/12

Übungen zur Vorlesung

Parameterisierte Algorithmen

Aufgabenblatt zum Thema Kerne

Besprechung: DO, 24.11.2011

Wir hatten ja schon gesehen, dass Graphen zur Modellierung von geographischen Verhältnissen benutzt werden können. In diesem Zusammenhang sind die folgenden Definitionen zu sehen. Weitere Hinweise finden Sie auf einem Poster neben unserem Sekretariat.

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Erinnerung / Hilfsdefinitionen: $N[v] := N(v) \cup \{v\}$ bezeichnet die *abgeschlossene Nachbarschaft* des Knoten $v \in V$. Allgemeiner sei $N[U] := \bigcup_{v \in U} N[v]$ die abgeschlossene Nachbarschaft der Knotenmenge $U \subseteq V$.

- Eine nicht-leere Knotenmenge S heißt *defensive Allianz* genau dann, wenn jeder Knoten v in S nicht mehr Nachbarn besitzt, die nicht in S liegen, als solche, die in S liegen; formal bedeutet dies:

  $$\forall v \in S : |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|.$$

  Intuitiv modelliert dieser Begriff, dass die Allianz S gewährleistet, dass in keinem Fall die Zahl der potentiellen benachbarten Feinde diejenige der benachbarten Freunde übertrifft und somit immer eine gute Verteidigungsmöglichkeit besteht.

- Eine nicht-leere Knotenmenge S heißt *offensive Allianz* genau dann, wenn jeder Knoten v in $N[S] \setminus S$ nicht mehr Nachbarn besitzt, die nicht in S liegen, als solche, die in S liegen; formal bedeutet dies:

  $$\forall v \in N[S] \setminus S : |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|.$$

  Intuitiv modelliert dieser Begriff, dass die Allianz S gewährleistet, dass jeder Nachbar von S, der noch nicht zur Allianz gehört, mit einer Übermacht von potentiellen Gegnern (aus S) konfrontiert wird und somit leicht von S aus angegriffen werden kann.

- Eine nicht-leere Knotenmenge S heißt *mächtige Allianz* genau dann, wenn sie sowohl eine defensive als auch eine offensive Allianz ist; formal bedeutet dies:

  $$\forall v \in N[S] : |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|.$$

- Ist eine Allianz S auch noch eine dominierende Menge in (V, E), gilt also $N[S] = V$, so heißt diese Allianz *global*.

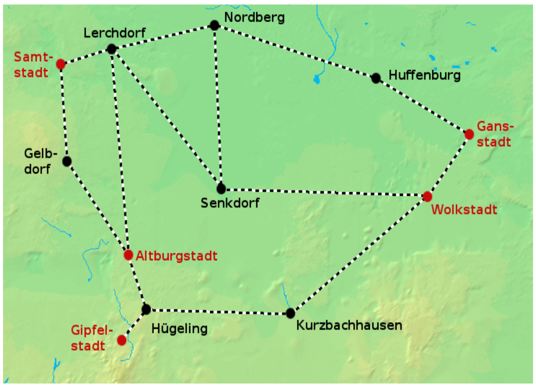

Abbildung 1: Ein Beispielgraph

1. Finden Sie Knotenmengen $S_1, \ldots, S_6$ in dem in Abb. 1 angegebenen Graphen mit:
   - S_1 ist eine defensive Allianz mit wenigstens zwei Knoten, die nicht global und nicht offensiv ist.
   - S_2 ist eine offensive Allianz mit wenigstens zwei Knoten, die nicht global und nicht defensiv ist.
   - S_3 ist eine mächtige Allianz, die nicht global ist.
   - S_4 ist eine defensive globale Allianz mit wenigstens zwei Knoten, die nicht offensiv ist.
   - S_5 ist eine offensive globale Allianz mit wenigstens zwei Knoten, die nicht defensiv ist.
   - S_6 ist eine mächtige globale Allianz.
2. Aus den sechs soeben eingeführten Allianz-Begriffen ergeben sich sechs Minimierungsprobleme, beispielsweise die Aufgabe, in einem vorgegebenen Graphen G eine kleinstmögliche defensive Allianz zu finden. (Beachte: Allianzen sind stets nicht-leere Mengen!) Formalisieren Sie die zugehörigen sechs Entscheidungsprobleme!
3. Wie in Vorlesung 2 angesprochen, haben Sie bei der Bearbeitung der vorigen Teilaufgabe sechsmal einen “natürlichen Parameter” eingeführt, nämlich als obere Schranke für die gesuchten Allianzen. Suchen Sie Reduktionsregeln für die so parameterisierten sechs Entscheidungsprobleme. Beweisen Sie jeweils die Korrektheit der gefundenen Regeln und machen Sie sich auch Gedanken darüber, ob so ein Reduktionsschritt in polynomieller Zeit abgearbeitet werden kann.
4. Überlegen Sie sich, wie sich aus den von Ihnen gefundenen Reduktionsregeln evtl. Kernreduktionen für die angegebenen Probleme angeben lassen. Wie groß sind die so von Ihnen gefundenen Kerne, gemessen in der Zahl der Knoten der reduzierten Instanz?