Parameterisierte Algorithmen

WS 2011/12 in Trier

Henning Fernau
fernau@uni-trier.de

$\boxed{\textbf{Parameterisierte Algorithmen}}$ Gesamtübersicht

- Einführung
- Grundbegriffe
- Problemkerne
- Suchbäume
- Graphparameter
- Weitere Methoden
- Komplexitätstheorie—parameterisiert

Organisatorisches

Vorlesung: Dienstag 12-14 Uhr, H7
NEU ab 2. VL-Woche: Dienstag 16:00 - 17:30 h H 406

Übungen (Daniel Meister): Dienstag 10-12 Uhr, HZ 204
NEU ab 1. VL-Woche: Donnerstag 14:00 - 15:30 h H 405

Meine Sprechstunde: DO, 13-14 Uhr

Kontakt: fernau,daniel.meister@uni-trier.de

Hausaufgaben / Schein ?! n.V. (Master ?! $\longrightarrow$ mündliche Prüfung)

$\boxed{\text{Einführung 1: Motivation}}$

Das Gute: *P*

Erinnerung: *P* ist die Klasse von (Entscheidungs-)Problemen, die von *deterministischen* Turing-Maschinen in Polynomzeit entschieden werden können.

Beispiele:

- Sortieren von n Gegenständen: $\mathcal{O}(n \log(n))$ (nicht bei TM-Modell).
- Wortproblem für kontextfreie Sprachen: $\mathcal{O}(n^3)$.
- Matrixmultiplikation: $\mathcal{O}(n^3)$.

Das Böse: *NP*-Härte

Erinnerung: *NP* ist die Klasse von (Entscheidungs-)Problemen, die von *nichtdeterministischen* Turing-Maschinen in Polynomzeit entschieden werden können.

Meist wird von solch einem *NP*-Entscheidungsalgorithmus eine Lösung mitgeliefert. M.a.W.: Es gibt (dann) einen *deterministischen* Algorithmus, der die Gültigkeit der gefundenen Lösung *überprüft*.

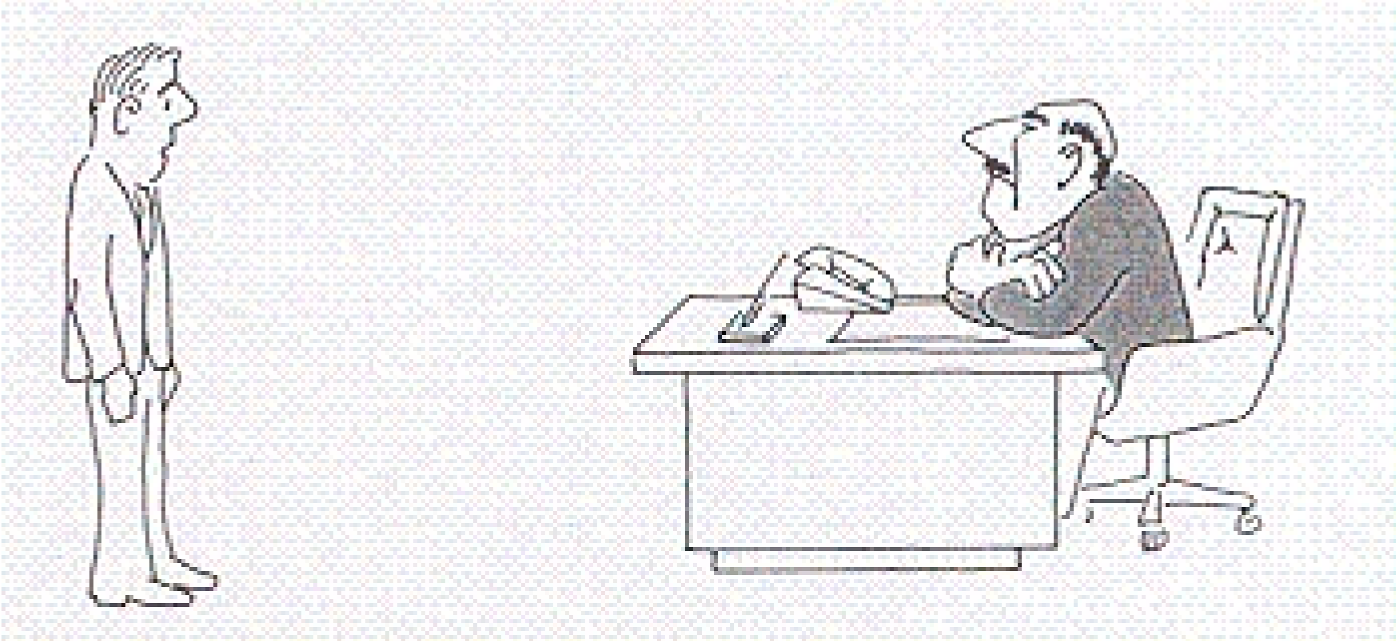
NP-vollständige Probleme sind die “schwierigsten” Probleme in *NP*. *NP*-harte Probleme sind keineswegs einfacher, liegen aber nicht unbedingt in *NP*.

Motivation

Viele interessante Probleme (aus der Praxis!) sind NP-hart
$\Rightarrow$ wohl keine Polynomialzeitalgorithmen sind zu erwarten.

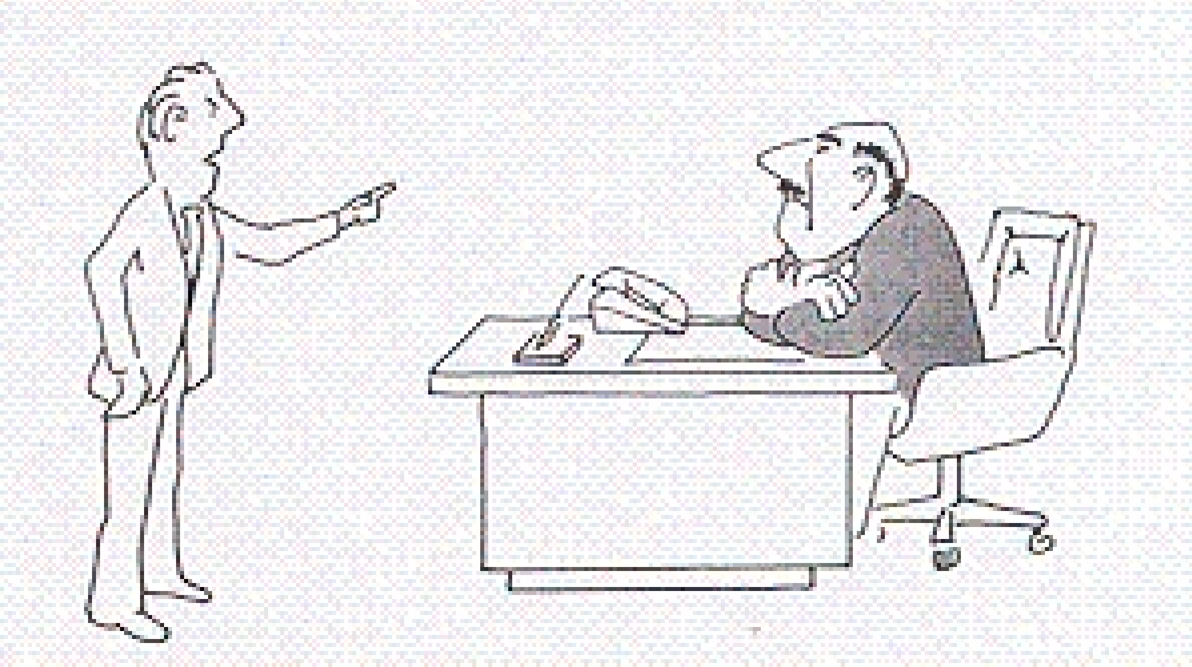
Motivation

siehe `http://max.cs.kzoo.edu/~kschultz/CS510/ClassPresentations/NPCartoons.html` wiederum aus Garey / Johnson



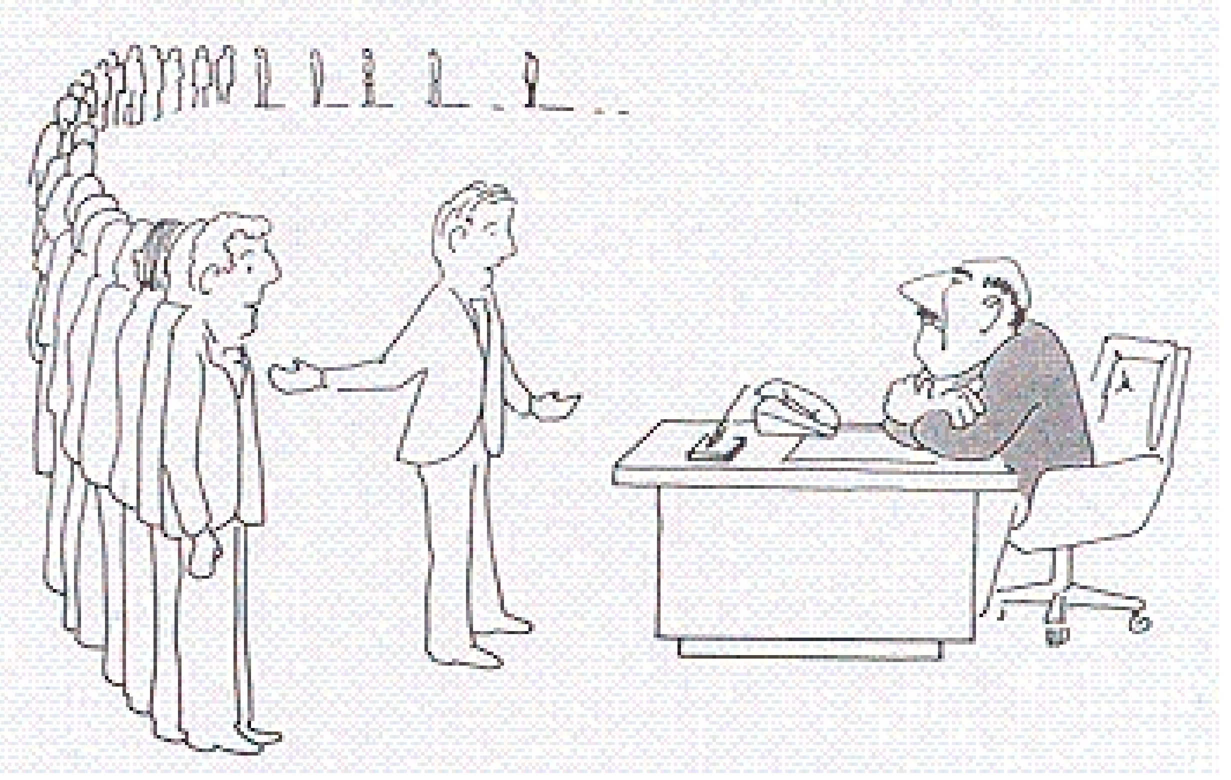
Sorry Chef, aber ich kann für das Problem keinen guten Algorithmus finden. . .

Die beste Antwort wäre hier aber...



...Ich kann aber beweisen, dass es für das Problem keinen guten Algorithmus geben kann !

Was die Komplexitätstheorie statt dessen liefert. . .



. . . Ich kann aber beweisen, dass das alle anderen auch nicht können !

Das Credo: $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{NP}$

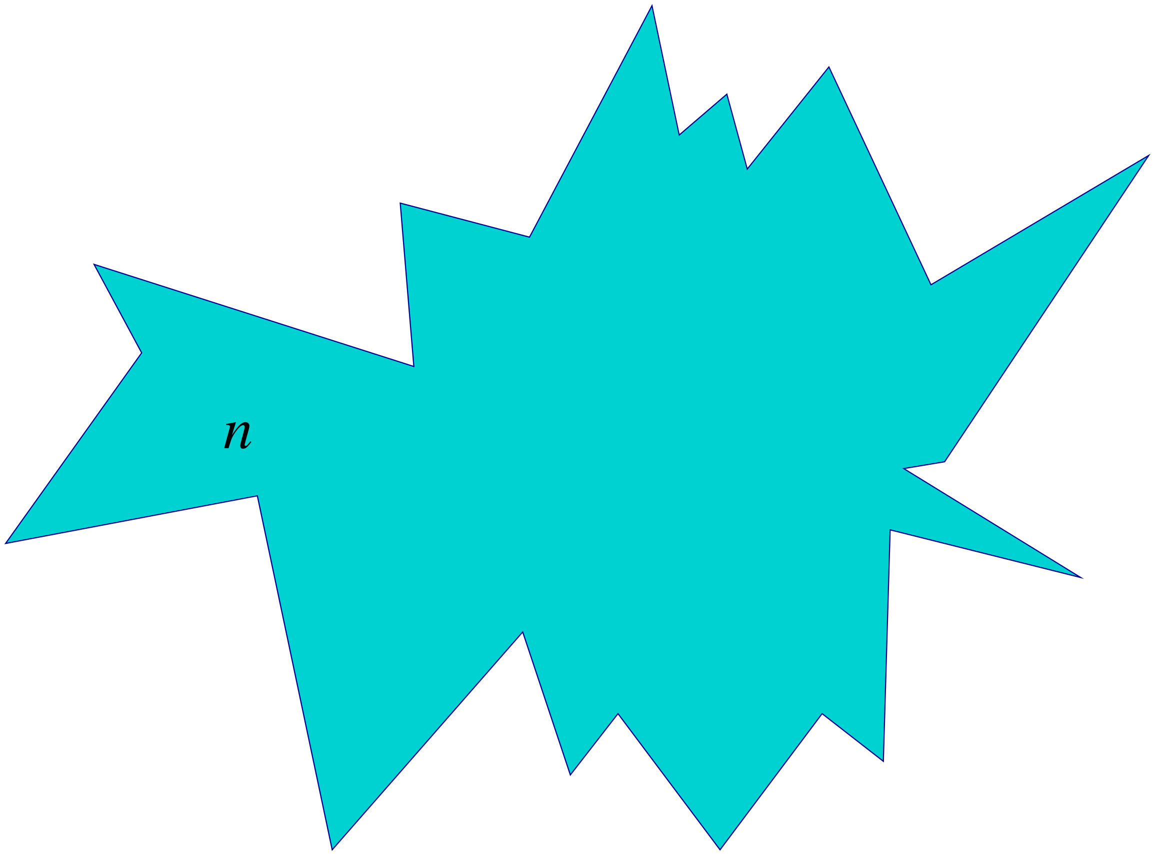
Folgerung: Für *NP*-harte Probleme “glaubt man” nicht an Polynomzeitalgorithmen zu ihrer Lösung.

“Ergo” (?) Exponentialzeitalgorithmen sind unvermeidlich für exakte Lösungen *NP*-harter Probleme.

Beispiele für *NP*-vollständige Probleme

- SATisfiability (Erfüllbarkeit logischer Formeln: Satz von Cook)
- Viele Graphprobleme:
  - Gibt es eine Knotenüberdeckung der Größe $\leq k$? (Vertex Cover VC)
  - Gibt es eine unabhängige Menge der Größe $\geq k$? (Independent Set IS)
  - Gibt es eine dominierende Menge der Größe $\leq k$? (Dominating Set DS)

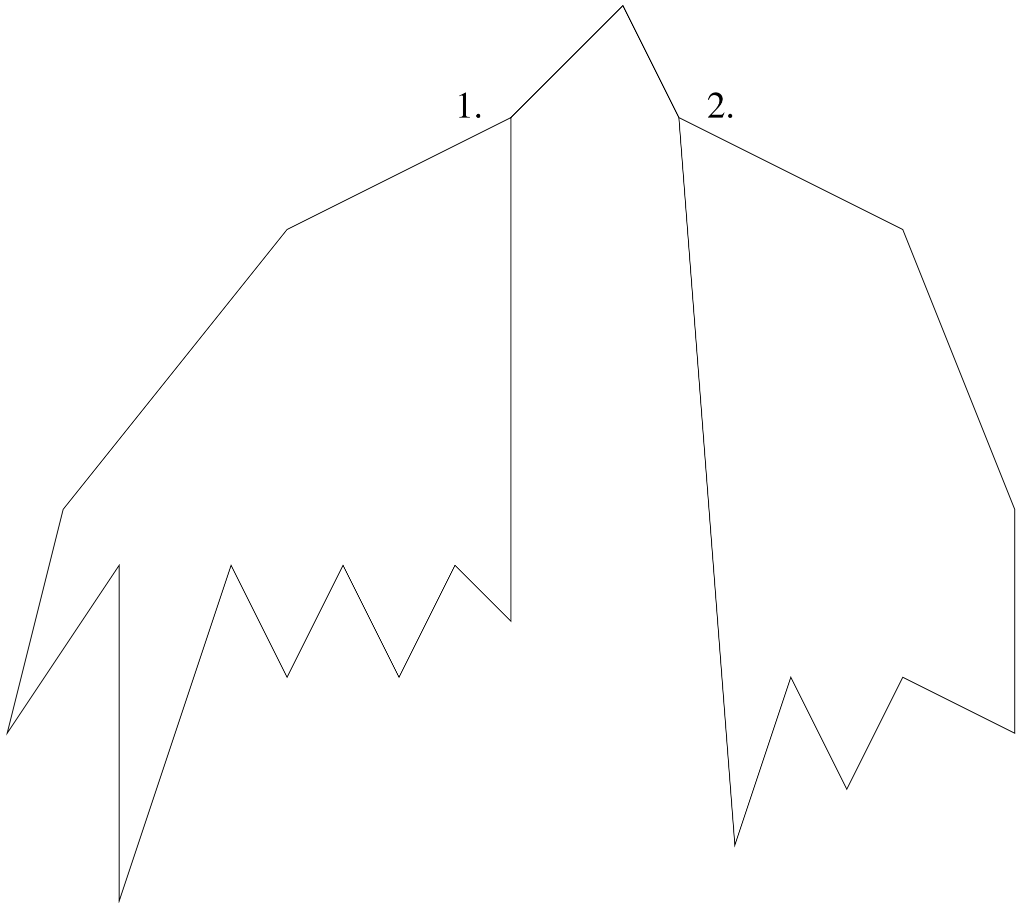
The Curse of Combinatorics (Folklore)



Auswege:

- Suchbäume (branch & bound):
  Exponentialzeit; Laufzeitgarantien?
- Näherungsalgorithmen:
  Polynomzeit; Güteschranken; nicht optimal
- Heuristiken, u.a. Reduktionsregeln
- Randomisierung

Suchbäume:



Wie “schlimm” ist Exponentialzeit?

Vergleichen wir exponentielle mit polynomiellen Laufzeiten für $n = 50$ auf einem Rechner, der 10^8 Operationen je Sekunde bearbeitet.

Polynomiell		Exponentiell	
Komplexität	Laufzeit	Komplexität	Laufzeit
n^2	25 μs	1.2^n	91 μs
n^3	1 ms	1.5^n	6 s
n^5	3 s	2^n	130 Tage
n^{100}	$9.13 \cdot 10^{156}$ Jahre	3^n	$228 \cdot 10^6$ Jahre

Sehr wichtig: Komplexitätsabschätzung

Thm. 3-HITTING SET ist lösbar in Zeit $\mathcal{O}(2.17\ldots^k + kn)$.

$k = \ldots$	10	15	20	25	30
3^k	60 ms	15 s	3487 s $\approx$ 1 h	847289 s $\approx$ 10 d	57192 h $\approx$ 6.5 y
2.18^k	3 ms	0.12 s	6 s	290 s $\approx$ 4 min	4 h

(Annahme: 10^6 Suchbaumknoten pro Sek.)

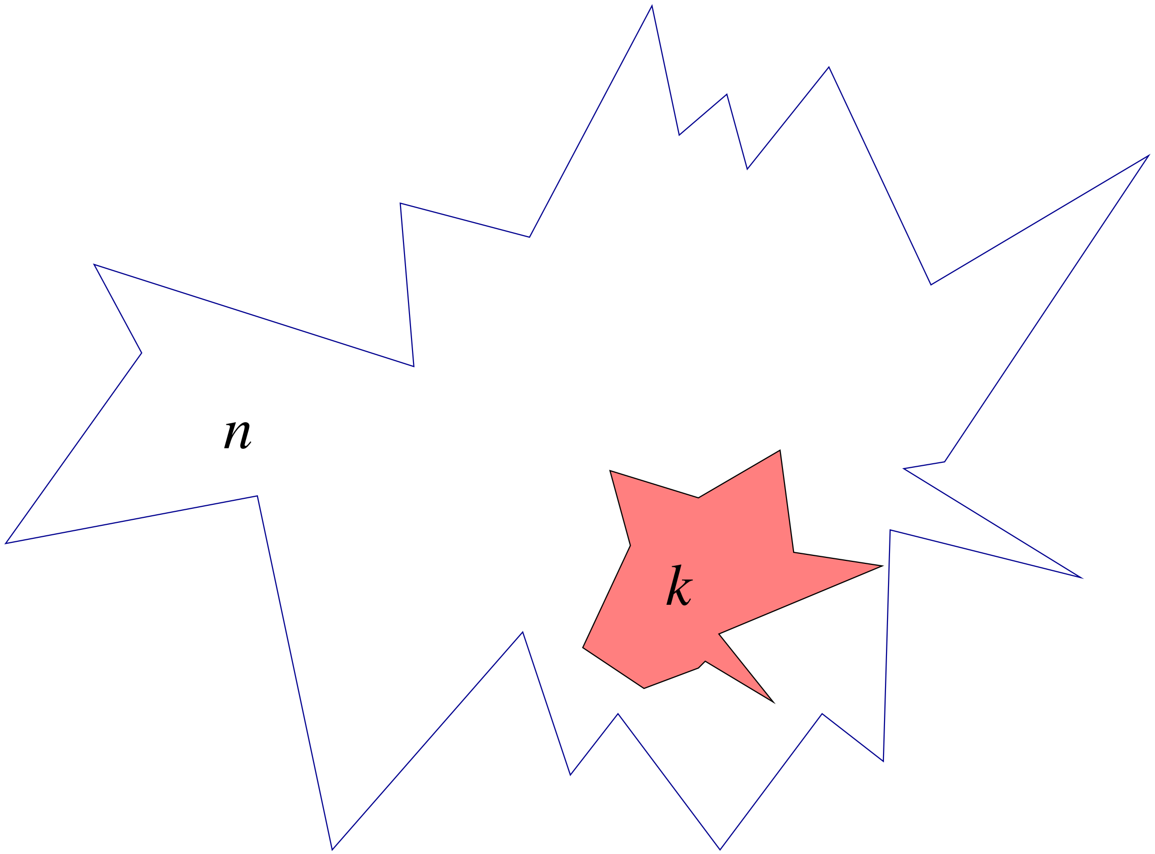
Einführung 1: Parameterisierte Algorithmen im Überblick

Parameterisierte Algorithmen

- Die parameterisierte Sicht

- Beispiel HITTING SET

The Curse of Combinatorics Eine zweidimensionale Sicht



Ziel:

- exakte Algorithmen mit
- Laufzeitgarantien

Methoden: (u.a.)

- “Problemkerne” (Datenreduktion)
- Suchbäume

Parameterisierte Algorithmik

Die Klasse *FPT* (fixed parameter tractable) enthält Sprachen $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$, für die es einen Algorithmus gibt, der die Frage “$(x, k) \in L$?” in Zeit

$$f(k) \cdot p(|x|)$$

entscheidet (f bel., p Polynom).

Satz. Gleichwertig hiermit ist: Es gibt einen Problemkern (x', k') zu Instanz (x, k) mit $k', |x'| \in \mathcal{O}(g(k))$ für g beliebig.
Die zugehörige Problemkernreduktion ist in Polynomzeit berechenbar.

Spezialfall linearer Kern: $|x'| \leq \alpha k, k' \leq k$.

Literatur

R. Downey / M. Fellows: Parameterized Complexity. Springer, 1999.

H. Fernau: Parameterized Algorithmics: A Graph-Theoretic Approach (auf meiner Homepage “insgeheim” under habil.pdf zu erhalten)

J. Flum / M. Grohe: Parameterized Complexity Theory. Springer, 2006.

R. Niedermeier: Invitation to Fixed-Parameter Algorithms. Oxford University Press, 2006.

Skript: Parametrisierte Algorithmen von R. Niedermeier / J. Alber (leicht verändert von J. Gramm) in Tübingen.

Foliensatz von P. Rossmanith in Aachen.

Datenreduktion

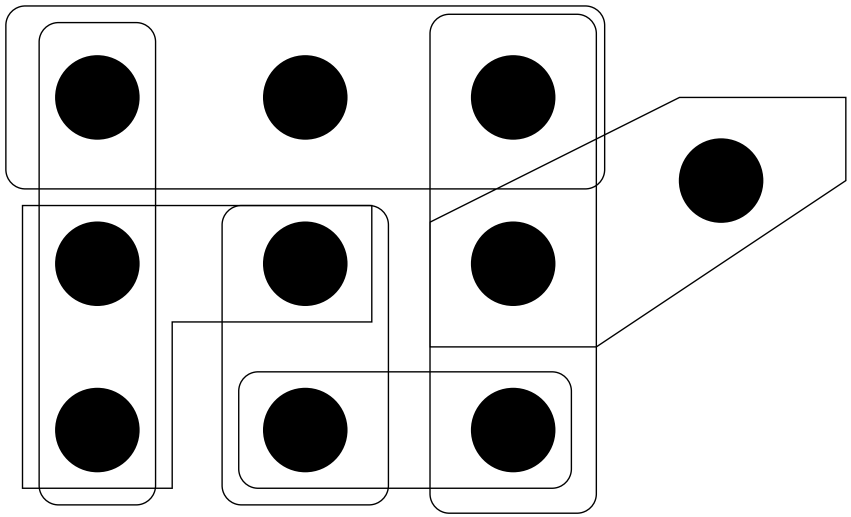
- Die parameterisierte Sicht

- Beispiel HITTING SET

Exkurs: Hypergraphen

Hypergraph $G = (V, E)$:
V: Knotenmenge
$E \subseteq 2^V$: Kantenmenge
Spezialfall: $\forall e \in E : |e| \leq 2$ (ungerichteter) Graph

Ein Beispiel

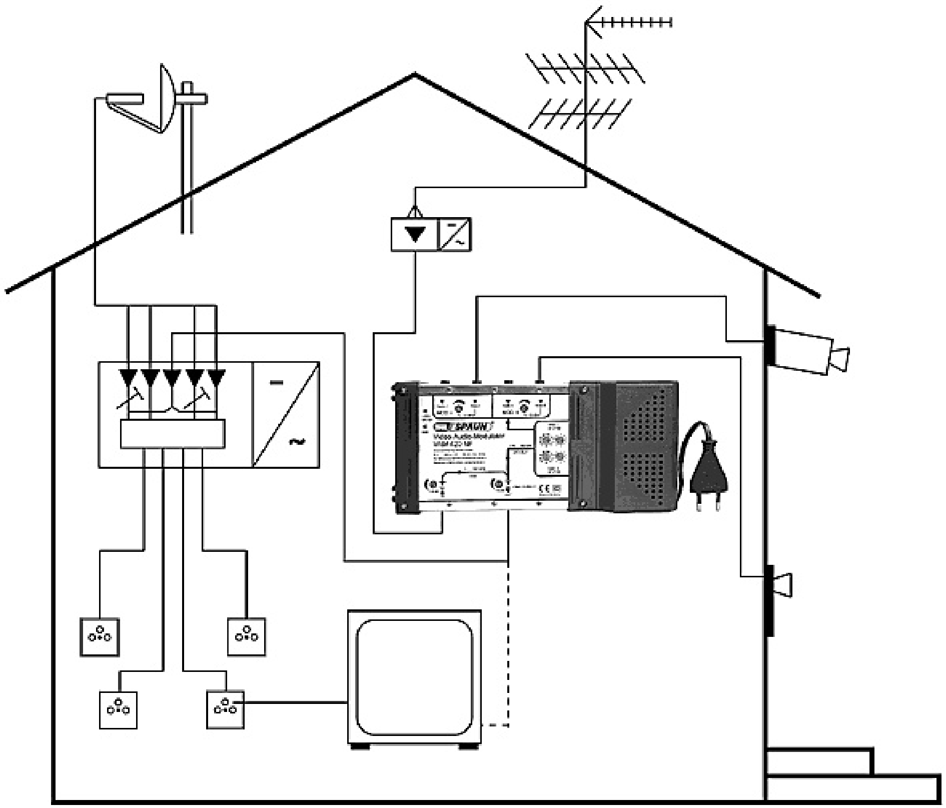


3-HITTING SET: Knotenüberdeckungsproblem auf Hypergraphen

Eingabe: Hypergraph $G = (V, E)$ mit *Kantengröße* höchstens 3: $\forall e \in E(|e| \leq 3)$
Parameter: k
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung (hitting set) mit höchstens k Knoten:

$$\exists C \subseteq V\,(|C| \leq k \wedge \forall e \in E(C \cap e \neq \emptyset))\,?$$

Motivation: Systemanalyse á la Reiter



Was ist ein System? (nach R. Reiter)

- Systembestandteile (Komponenten) $\mathcal{C}$
- Systembeschreibung (wie? $\rightsquigarrow$ Logik) $\mathcal{SD}$:
  Aussagen über erwartetes Systemverhalten,
  d.h., Beziehungen zwischen den Komponenten.
- beobachtetes Systemverhalten (Observationen) $\mathcal{OBS}$

Was ist ein fehlerbehaftetes System?

- spezielles Prädikat $ab(c)$ für jede Komponente $c \in C$:
  kennzeichnet abnormes Verhalten (Fehler)
  SD enthält auch Aussagen der Form:
  "Wenn $ab(c)$, dann gilt:..." bzw.
  "Wenn $\neg ab(c)$, dann gilt:..."

- ein System (C, SD, OBS) ist *fehlerbehaftet*, wenn in

$$SD \cup OBS \cup \{\neg ab(c) \mid c \in C\}$$

  ein Widerspruch zu erkennen ist.

Konfliktmengen und Diagnosen

Eine *Konfliktmenge* ist eine Menge C' von Komponenten, so dass in

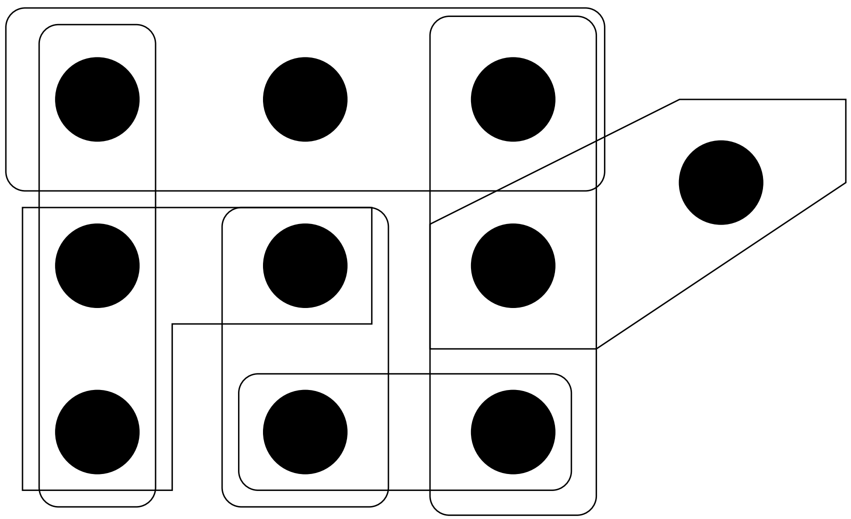
$$SD \cup OBS \cup \{\neg ab(c) \mid c \in C'\}$$

ein Widerspruch zu erkennen ist.

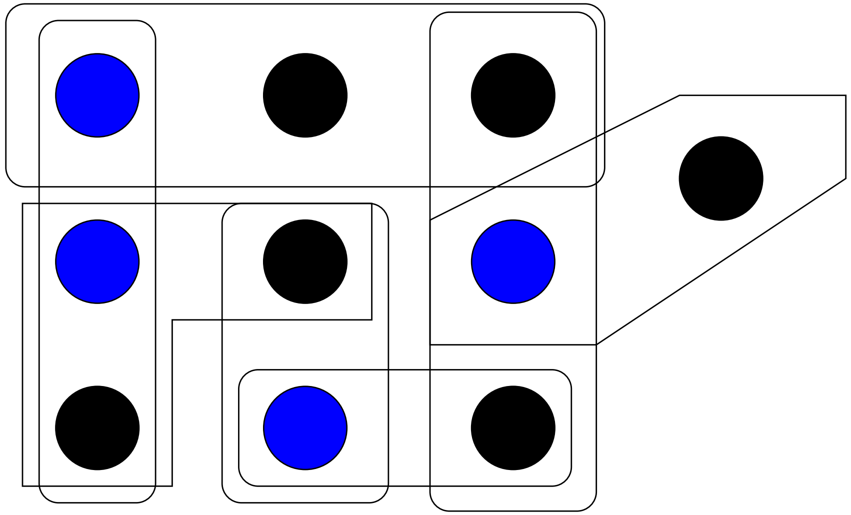
Eine *Diagnose* ist eine möglichst kleine Menge C' von Komponenten, so dass $C \setminus C'$ *keine* Konfliktmenge ist.

Übersetzung in Hitting Set:
Die Hypergraphknoten sind die Komponenten,
die Konfliktmengen sind die Kanten,
die Diagnose die Überdeckungsmenge.

Ein abstrakteres Beispiel



Eine kleinste Überdeckung



Datenreduktionsregeln

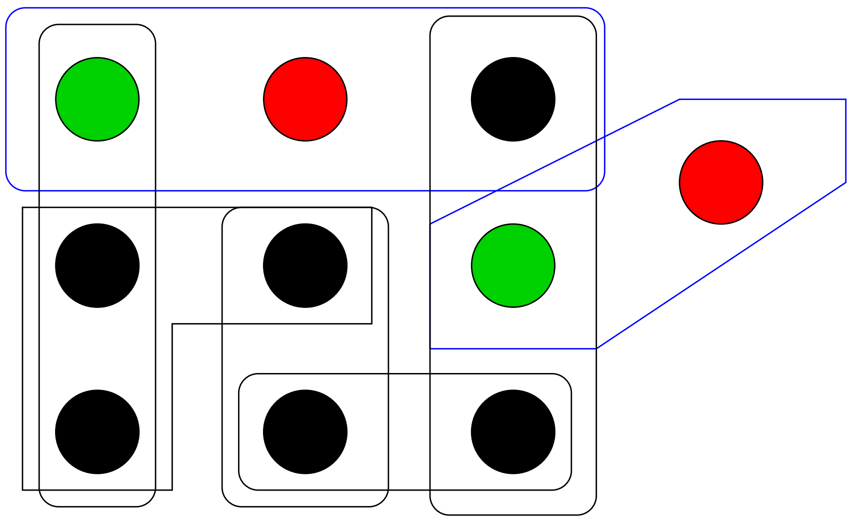
1. Kantendominierung: $f \subset e$. $\rightsquigarrow$ entferne e

2. Kleine Kanten: $e = \{v\} \rightsquigarrow v$ kommt ins HS; entferne e

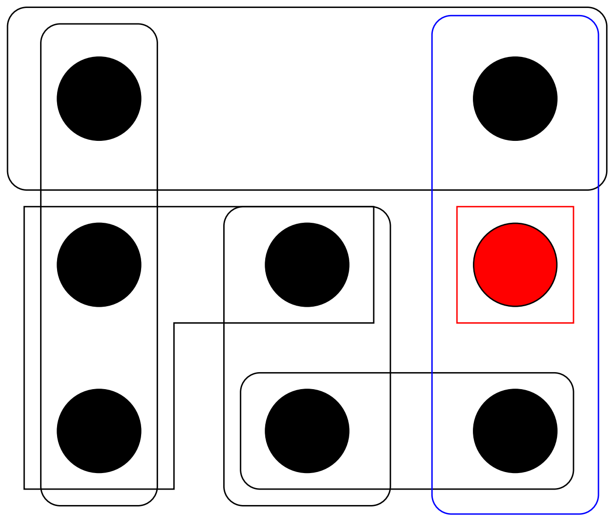
3. Knotendominierung: Ein Knoten x heiße *dominiert* durch einen Knoten y, falls $\{e \in E \mid x \in e\} \subseteq \{e \in E \mid y \in e\} \rightsquigarrow$ entferne x

R. S. Garfinkel and G. L. Nemhauser. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1972.
Oft wiederentdeckt: K. Weihe (Zugnetzoptimierung), R. Niedermeier & P. Rossmanith (param. HS, 2003)
Also: R. Reiter (Theory of Diagnosis $\rightsquigarrow$ HS Bäume, 1987)

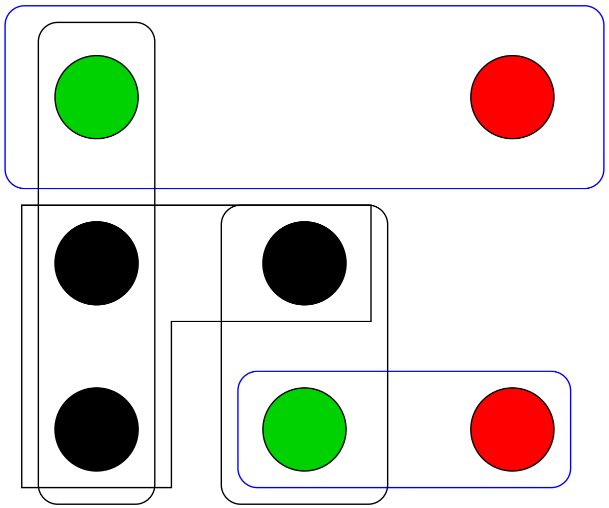
Knotendomination



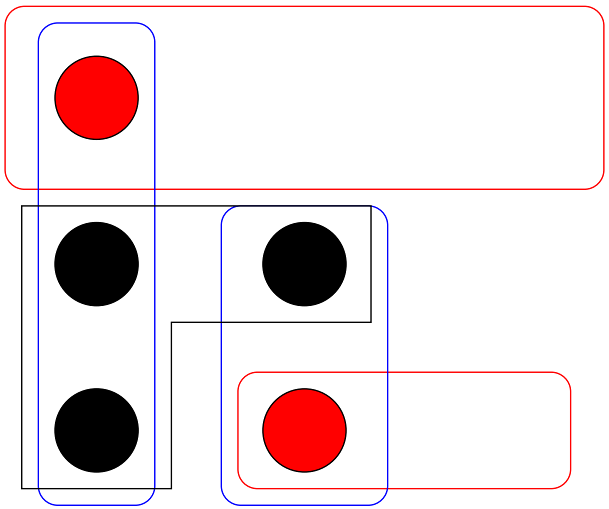
Kantenregeln



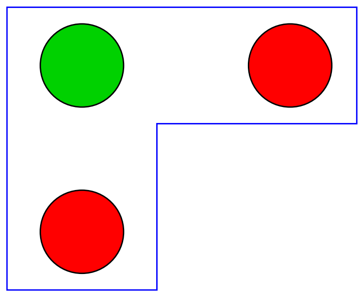
Knotendomination



Kantenregeln



Knotendomination



Verzweigungsregeln (heuristic priorities)

Bevorzuge Verzweigungen bezüglich

1. kleiner Kanten

2. Knoten hohen Grades

3. ...

Der Algorithmus HS(G, k)

1. Wende erschöpfend alle Reduktionsregeln an; das liefert (G', k')
2. **if** $k' \leq 0$ **then** return $(k' = 0 \& E(G') = \emptyset)$
3. **if possible:** Wähle $x \in V(G')$ gemäß Verzweigungsregeln
4. **if** HS$(G' - E[x], k' - 1)$ **then** return YES
5. **else** return HS$(G' - x, k')$