Parameterisierte Algorithmen

WS 2011/12 in Trier

Henning Fernau
fernau@uni-trier.de

Parameterisierte Algorithmen Gesamtübersicht

- Einführung
- Grundbegriffe
- Problemkerne
- Suchbäume
- Graphparameter
- Weitere Methoden
- Komplexitätstheorie—parameterisiert

Aufzählungsprobleme

In manchen Anwendungen gefragt:
Auflistung aller minimalen Mengen einer vorgegebenen Obergrenze

oder:
Auflistung aller maximalen Mengen einer vorgegebenen Untergrenze

$\rightsquigarrow$ auch hier FPT-Algorithmen (parameterisiert nach Grenzgröße) von Interesse

Satz 1 *Der aufgeführte Algorithmus HSEnum listet bei Eingabe* $(G, k, \emptyset)$ *alle minimalen HS der Maximalgröße* k *in Zeit* $\mathcal{O}^*(d^k)$*; hierbei ist* d *die Anzahl der Elemente der größten Hyperkante von* G*.*

Algorithm 1 A search tree algorithm HSEnum enumerating HS

Input(s): a hypergraph $G = (V, E)$, a positive integer k, a vertex set X

Output(s): $\mathcal{S}$: a set of HSs of G s.t. each minimal HS of size $\leq k$ appears in $\mathcal{S}$

```
if E = ∅ then
    return {X}
else if k = 0 then
    return ∅
else
    Choose edge e ∈ E
    S = ∅
    for v ∈ e do
        S = S ∪ HSEnum(G[V \ {v}], k − 1, X ∪ {v})
    end for
    return S
end if
```

Induktionsbeweis Wir beweisen eine stärkere Aussage:
HSEnum(G, k, X) liefert ein Mengensystem $\mathcal{S}$ zurück, sodass gilt:
(i) $\forall S \in \mathcal{S}$: $X \subseteq S$ und $S \setminus X$ ist HS von G der Mächtigkeit $\leq k$.
(ii) $\forall S$: S minim. HS von G, $|S| \leq k \Rightarrow \exists X : S \cup X \in \mathcal{S}$.

IA: Dies gilt für $E = \emptyset$, d.h., $|E| = 0$.
IS: Angenommen, $|E| > 0$ und die Aussage gelte für Hypergraphen mit weniger als $|E|$ Kanten.
Es sei $\mathcal{S}$ das bei Eingabe von $G = (V, E)$ (etc.) zurückgelieferte Mengensystem.
Für (i) ist $\mathcal{S} = \emptyset$ trivial; betrachte also $S \in \mathcal{S}$ beliebig.
Für die ausgewählte Kante $e \in E$ sei $\mathcal{S}_v$ das für den Fall $v \in e$ durch Aufruf HSEnum$(G[V \setminus \{v\}], k-1, X \cup \{v\})$ zurückgelieferte Mengensystem.
IV $\rightsquigarrow X \cup \{v\} \subseteq S_v \subseteq S$ und $S \setminus (X \cup \{v\})$ ist HS von $G[V \setminus \{v\}] = (V_v, E_v)$.
IV $\rightsquigarrow \forall e' \in E_v : e' \cap S \setminus X \neq \emptyset$; wegen $v \in S$ gilt auch: $\forall e' \in E \setminus E_v : e' \cap S \setminus X \neq \emptyset$
$\rightsquigarrow S \setminus X$ ist HS von G (mit höchstens k Knoten).
Für (ii) betrachte ein minimales HS S von G mit $|S| \leq k$.
Wegen $E \neq \emptyset$ gilt $k > 0$ (sonst "Fehlerfall").
Betrachte gewählte Kante $e \in E$ sowie $v \in e \cap S$ (ex., da S HS).
S_v sei wieder das Ergebnis des Aufrufs mit $G[V \setminus \{v\}] = (V_v, E_v)$.
$S \setminus \{v\}$ ist minimales HS von (V_v, E_v).
IV $\rightsquigarrow S \cup X = (S \setminus \{v\}) \cup (X \cup \{v\}) \in S_v \subseteq S$.

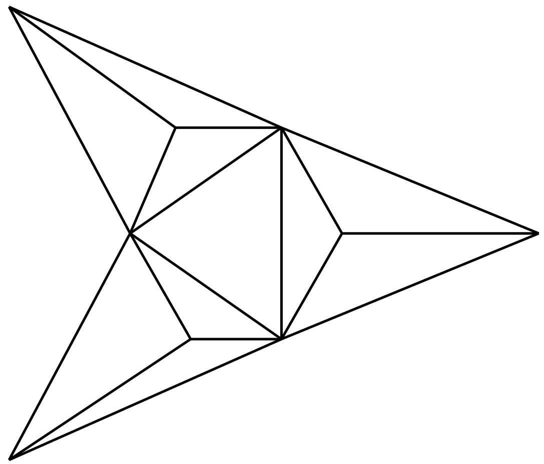
Problem: nicht-minimale Mengen

Wenn auf den Kanten $e_1 = \{1, 3\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{3, 4\}$, $e_4 = \{4, 5\}$ in der angegebenen Reihenfolge verzweigt wird, so wird in einem Suchbaumast die Überdeckungsmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ betrachtet (falls $k \geq 4$).
Diese Lösung ist offenbar nicht minimal.
Um Minimalität zu gewährleisten, markieren wir anfangs (und nur dann) alle Knoten vom Grad Eins. In unserem Beispiel würden so $1, 2, 5$ markiert.
Wird nun während des Laufs des Algorithmus' ein Grad-Eins-Knoten x erzeugt, so lassen wir den Fall durch Reduktionsregel (Grad-1-Regel) aus, der die Aufnahme von x in die Überdeckungsmenge betrachten würde.
Im Beispiel führt das Verzweigen auf e_1 und e_2 in einem Ast dazu, dass 3 vom Grad Eins ist. Dann würde automatisch 3 <u>nicht</u> in die Überdeckungsmenge aufgenommen, sondern 4 (um e_3 abzudecken).

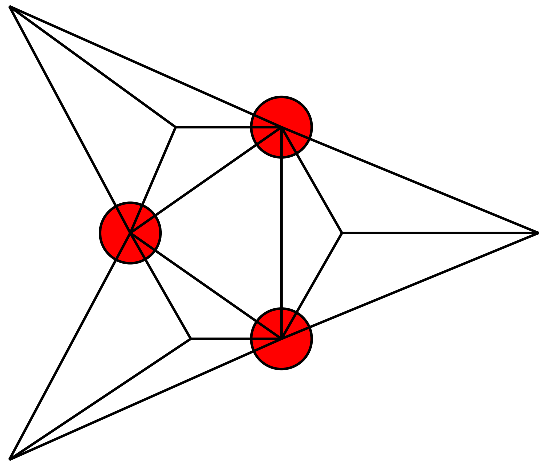
Man überlege sich, dass so die <u>einzige Möglichkeit</u>, nicht-minimale Mengen zu erzeugen, ausgeschlossen wird.

Erinnerung: Dominierende Mengen

Wir werden noch sehen:
Das Problem DS, dominierende Mengen mit höchstens k Knoten in einem Graphen zu finden, liegt "wahrscheinlich" nicht in *FPT*. (W[2]-hart)



. . . mit einer zulässigen dominierenden Menge



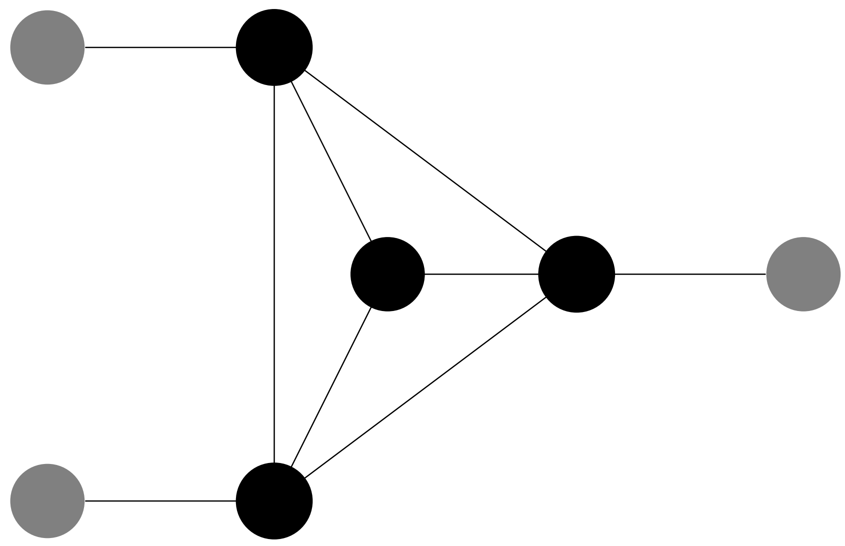
Ist diese dominierende Menge kleinstmöglich ?

Kantengraphen (line graphs)

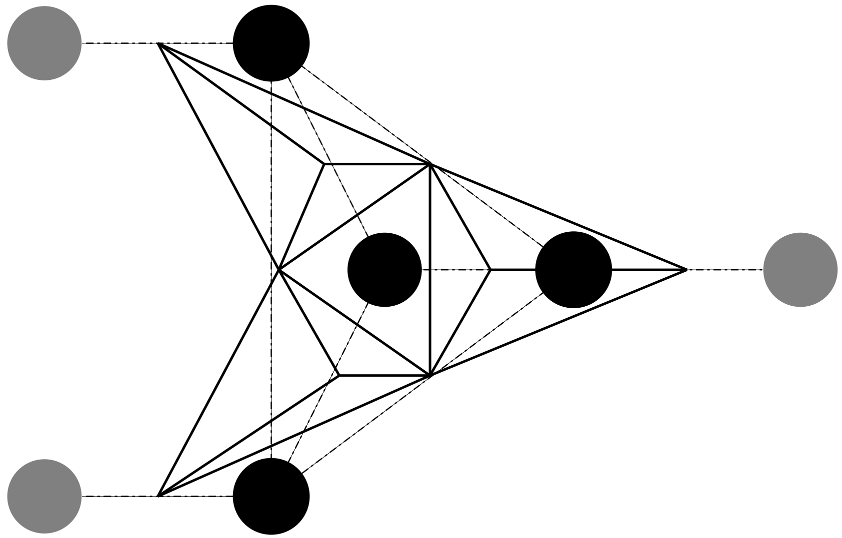
Adjazenzrelation aus Kantennachbarschaft eines anderen Graphen, genauer:

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so hat sein Kantengraph $L(G)$
E als “Knotenmenge” und
es gibt eine Kante (in $L(G)$) zwischen $e_1, e_2 \in E$
gdw. e_1 und e_2 haben gemeinsamen Knoten in G.

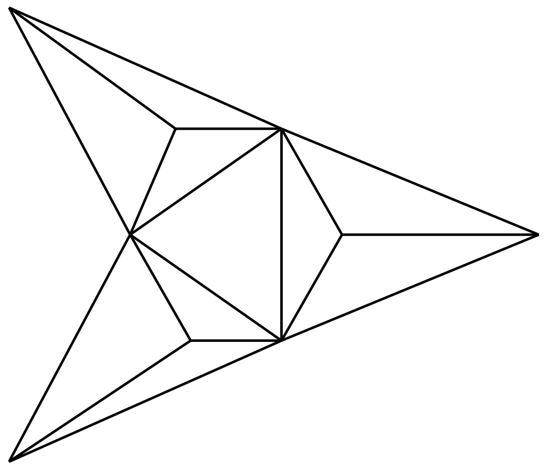
Ein einfacher Graph



. . . und sein Kantengraph



... liefert unser Beispiel



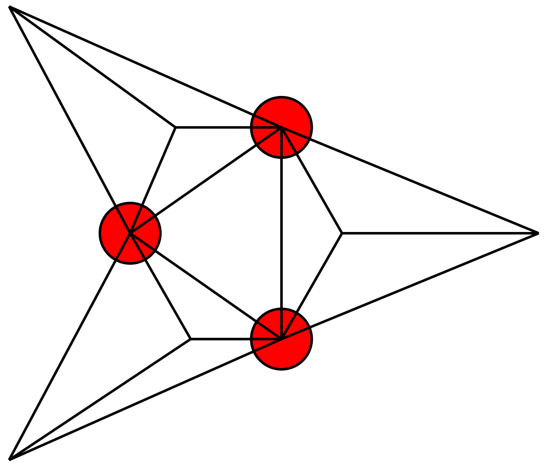
Unser Entscheidungsproblem:

DS auf Kantengraphen; für “normale” Graphen heißt dies übersetzt:

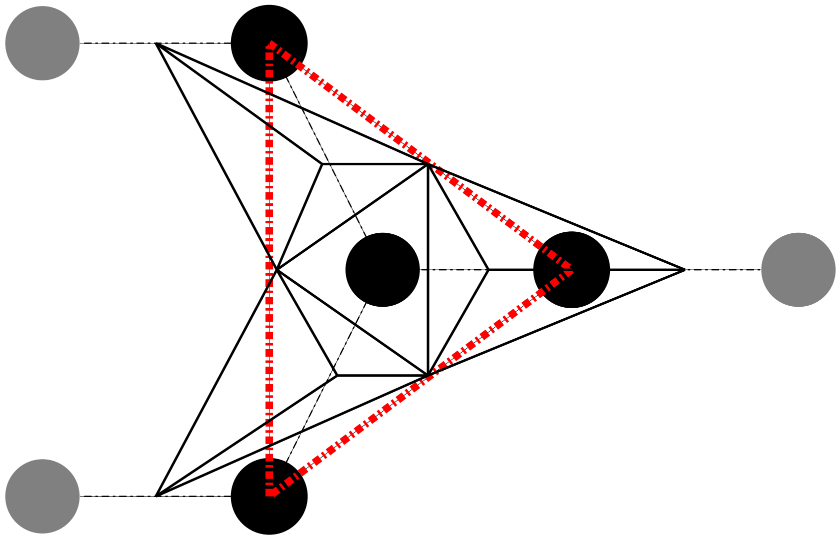
KANTENDOMINIERUNGSPROBLEM (EDS)
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$
Parameter: ein $k \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Kantendominierungsmenge $D \subseteq E$ mit $|D| \leq k$?

Dabei heißt D Kantendominierungsmenge von $G = (V, E)$, wenn es zu jedem $e \in E$ ein $d \in D$ gibt mit $e \cap d \neq \emptyset$.

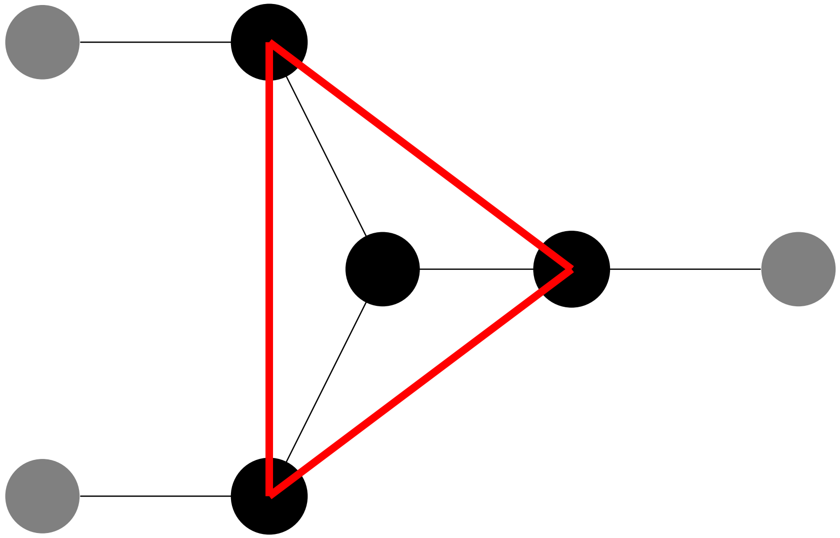
Die dominierende Menge



. . . wird übersetzt in eine Kantendominierungsmenge:



. . . etwas deutlicher:



Kantengraphen machen das Leben manchmal einfacher...

Eine klassische Sicht

	allg. Graphen	Kantengraphen
VC	*NP*-hart	in *P*
DS	*NP*-hart	*NP*-hart

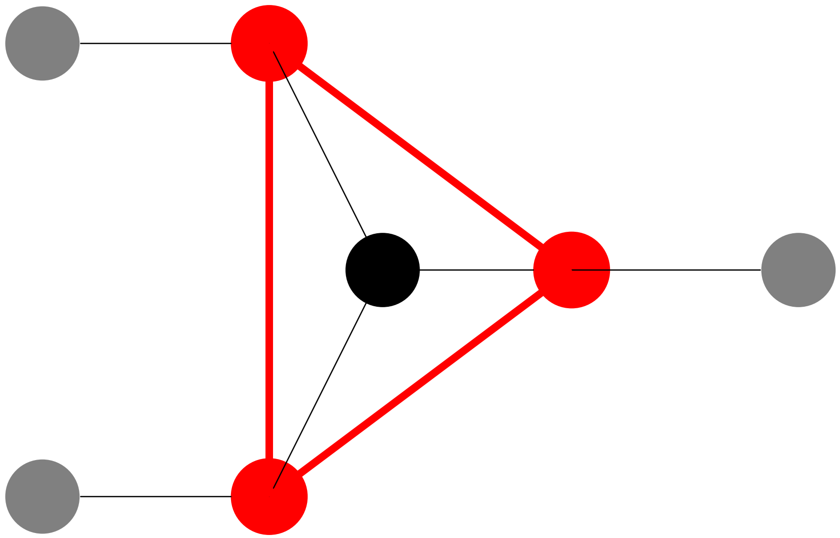
Kantengraphen machen das Leben manchmal einfacher...

Approximation und *FPT*(für (E)DS)

	allg. Graphen	Kantengraphen
Approximation	nicht besser als $\ln n$	Faktor-2-Approx.
Parameterisierung	W[2]-hart	in *FPT*

Eine einfache Beobachtung

$\mathbb{D}$ EDS $\rightsquigarrow$
alle Knoten von Kanten in $\mathbb{D}$ zusammen ergeben eine Knotenüberdeckung



Wieso liegt nun EDS in *FPT*?

Beobachtung 1: Ein EDS der Größe k liefert VC der Größe ℓ, $k \leq \ell \leq 2k$.

Beobachtung 2: Wir können alle minimalen VC bis zu der Größe $2k$ auflisten, (aber nicht alle VC bis zur Größe $2k$).

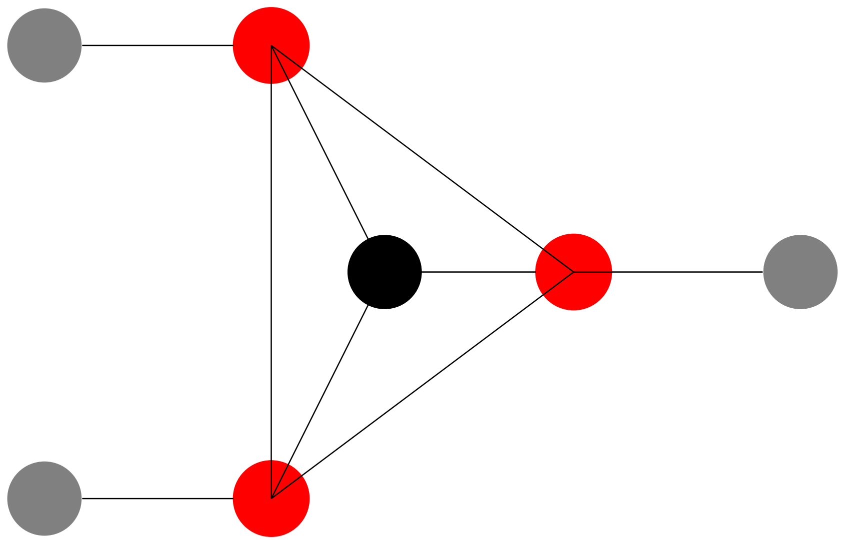
Problem: Wie hilft dies ?

Entscheiden durch Aufzählen

Was benötigen wir...

Eingabe: Ein (minimales) VC $\mathbb{C}$

Ausgabe: Ein kleinstmögliches EDS $\mathbb{D}$, dessen Knotenmenge $\mathbb{C}$ umfässt



Was der Algorithmenladen so auf Lager hat...

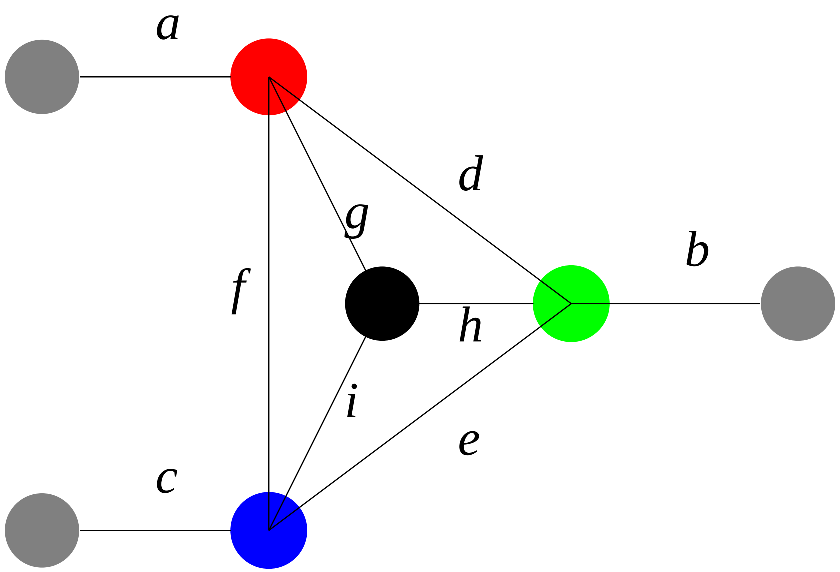
Betrachte Hilfs-Hypergraph $G' = (V', E')$:
G' enthält die Kanten E von G als seine Knoten, d.h., $V' = E$, und
für jedes $x \in C$ führen wir eine Hyperkante h_x ein, welche alle Kanten von G enthält, die inzident mit x sind.

Offenbar: $|E'| \leq |C|$

Gute Nachricht aus dem Algorithmenladen:
HS, parameterisiert nach der Anzahl der Kanten, ist in *FPT*. (s.u.)

Folgerung 2 *EDS kann in Zeit* $\mathcal{O}^*(2^{2k} * 2^{2k}) = \mathcal{O}^*(16^k)$ *gelöst werden.*

Zurück zu unserem Beispiel



$$\mathrm{h} = \{a, d, f, g\}$$
$$\mathrm{h} = \{b, d, e, h\}$$
$$\mathrm{h} = \{c, f, e, i\}$$

Offenbar gibt es keine Lösung der Größe Eins.
ABER: f zusammen mit irgendeinem “Knoten” aus h liefert Lösung der Größe zwei.
Nach dem Gesagten ist dies eine kleinstmögliche Lösung.

Speedy... 

Beobachte: Die gesuchte Kantendominierungsmenge enthält ein Maximum Matching für die vorzuliegende Knotenüberdeckungsmenge.

Warum? Eine Matchingkante benutzt zwei Knoten der Überdeckung, nicht nur einen, und führt daher bei vorzuliegender Überdeckung zu einer kleinstmöglichen Kantendominierungsmenge.

Bekannt: Solche Matchings kann man in Polynomzeit berechnen.

Folgerung 3 *EDS ist in Zeit* $\mathcal{O}^*(2^{2k}) = \mathcal{O}^*(4^k)$ *lösbar.*

Einzelheiten: Verallgemeinertes Kantenüberdecken

VERALLGEMEINERTES KANTENÜBERDECKUNGSPROBLEM (GEC)
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$, eine Menge $R \subseteq V$ von roten Knoten
Parameter: $k \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Kantenüberdeckungsmenge $C \subseteq E$ mit $|C| \leq k$, welche alle Knoten aus R abdeckt ?

GECmin ist das zugehörige Minimierungsproblem.

Lemma 4 *GECmin kann in Polynomzeit gelöst werden.*

Algorithm 2 GECmatch: A fast algorithm for GECmin, based on matching

Input(s): a graph $G = (V, E)$, a set of red vertices R

Output(s): a minimum-size set of edges C that covers all vertices from R

Create $H = G[R]$.
Find a maximum matching $M \subseteq E$ in H.
Let V' be all vertices in H that are not covered by M.
Let $C := M$.
for all $v \in V'$ **do**
    Choose an edge $e \in E$ such that $v \in e$.
    Add e to C.
end for
return C

Algorithm 3 EDS-enum: An enumeration-based search tree algorithm for EDS

Input(s): a graph $G = (V, E)$, a positive integer k

Output(s): if possible: a subset $D \subseteq E$, $|D| \leq k$, that dominates all edges or NO if no such set exists.

```
Create a list L of minimal vertex covers C of G with |C| ≤ 2k
{This hides the search tree part.}
for all C ∈ L do
    Set D :=GECmatch(G, C)
    if |D| ≤ k then
        return D
    end if
end for
return NO
```

Noch schneller... 

Idee: Vermeide Verzweigungen auf Knoten vom Grad Eins in der Knotenüberdeckungs-Aufzählungsphase.

$\leadsto$ An den Blättern des Aufzählungs-Suchbaums finden wir eine partielle Überdeckung sowie eine Menge E' von isolierten Kanten.

Hat $e' \in E'$ keine inzidenten Kanten im Originalgraph G, so nimm e' ins EDS.

Sonst: kontrahiere $e' = \{x, y\}$ und füge $[x = y]$ zum partiellen VC hinzu.

Folgerung 5 *EDS kann man in Zeit $\mathcal{O}^*(1.62^{2k}) = \mathcal{O}^*(2.62^k)$ lösen.*

Noch genauer... (Eingabegraph $G = (V, E)$)

Eingangs können wir alle isolierten Kanten ins EDS nehmen, also hat G o.E. keine isolierten Kanten.
Durch Aufzählungsphase erhalten wir partielle Knotenüberdeckung $C \subseteq V$ und Kantenmenge E'.
Danach suchen wir EDS $D \subseteq E$, welches erfüllt:

A $\forall v \in C \exists e \in D : v \in e$; (Abdeckung)

D $\forall e' \in E' \exists e \in D : e' \cap e \neq \emptyset$ (Dominierung).

Da e' nicht isoliert ist in G, wird e' o.E. durch $e \neq e'$ dominiert.
Bilde neuen Graphen G' aus G durch Kontraktion aller Kanten von E'.
Sei M die Menge der “Kontraktionsknoten” $[x, y]$.
Bilde $C' = C \cup M$.
Beh.: D ist kleinstmögliches EDS für G, welches A und D erfüllt gdw. es gibt kleinstmögliches GEC D' for G' (mit roter Knotenmenge C') mit $|D'| = |D|$.

Entscheiden durch Aufzählen

Diese Technik ist insbesondere geeignet für “schnelle” Algorithmenentwürfe.
$\leadsto$ Klassifizierung eines Problems in *FPT*

Da Aufzählungsphase relativ teuer, sollte nach Beschleunigungsmöglichkeiten gesucht werden.

Oft hilft auch, die Aufzählung nicht “bis zu Ende” durchzuführen.

Ähnliche Probleme I

- Gewichtetes Kantendominierungsproblem
- Auffinden von maximalen Matchings der Größe $\leq k$ (Min. max. matching)
- MATRIXDOMINIERUNG (MDS)
  Eingabe: $n \times n$ Matrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$
  Parameter: $k \in \mathbb{N}$
  Frage: Gibt es eine Menge D von Eins-Einträgen, $|D| \leq k$, sodass jeder Eins-Eintrag eine Zeile oder eine Spalte mit einem Eins-Eintrag aus D gemein hat ?

Algorithm 4 Reducing MDS to EDS.

Input(s): a matrix instance (M, k) of MDS.

Output(s): a graph instance (G, k) of EDS such that (M, k) is a YES-instance iff (G, k) is a YES-instance.

Let C be the set of columns of M.

Let R be the set of rows of M.

Form the vertex set $V = C \cup R$ of $G = (V, E)$.

for all $i \in R$, $j \in C$ **do**

  Put $\{i, j\} \in E$ iff entry (i, j) of M is one.

end for

Ähnliche Probleme II

Gibt es parameterisierten Aufzählungsalgorithmus für ein “Grundproblem”, z.B. für das Knotenüberdeckungsproblem, so gibt es auch Entscheidungsalgorithmen, die im Beispiel Knotenüberdeckungen mit bestimmten Eigenschaften erfragen.

Beispiel 1: Eine Knotenüberdeckung C von G heiße total, wenn $G[C]$ keine isolierte Knoten enthält.
TVC fragt nach der Existenz einer totalen Knotenüberdeckung der Größe höchstens k.

Beispiel 2: CVC fragt nach der Existenz einer zusammenhängenden Knotenüberdeckung der Größe höchstens k.

Aufzählen und Zählen per se

Angesagt, falls spätere Auswahl einer Lösung erwünscht.

Es gibt auch Aufzählungskerne, z.B. einen quadratischen für VC.
Frage: Wie geht das ? Warum nicht (so leicht) linear ?!

Verwandtes Problem:
Zählen aller minimalen VC einer vorgegebenen Maximalgröße k.
Zählen kann man durch Aufzählen lösen, es geht aber oft besser (wie ?):

Satz 6 *VC-Zählen geht in Zeit* $\mathcal{O}^*(1.62^k)$.

Schlimme Suchbäume

Eine defensive Allianz ist eine nicht-leere Knotenmenge $S \subseteq V$, sodass gilt: $\forall v \in S(|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|)$.

DA fragt nach der Existenz einer defensiven Allianz der Größe höchstens k.

Satz 7 *DA liegt in FPT.*

Beweis O.E. sei die Eingabe zusammenhängend. (Sonst getrennte Suche auf Komponenten)
Gibt es Lösung S, so gilt nach Voraussetzung $S \neq \emptyset$. Wir verzweigen daher eingangs katalytisch und nehmen für jeden Knoten in einem Zweig einmal an, er gehöre zu S.
Falls v in einer DA liegt, so $\deg(v) < 2k$ (sonst Widerspruch zur Def.).
Setze $S_0 = \{v\}$.
Falls $|S_i| > k$, terminiere diesen Suchbaumast.
Falls $|S_i|$ DA, so YES-Instanz.
Sonst: Verzweige auf allen $x \in N(S_i)$: Mache rekursiv mit $S_{i+1} = S_i \cup \{x\}$ weiter.

Warum *FPT*?