Formale Grundlagen der Informatik

WiSe 2013/14

Universität Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Formale Grundlagen der Informatik Gesamtübersicht

1. Rechnen: Gesetze und Regeln
2. Modellieren und Formalisieren: Keine Angst vor Formalismen
3. Was ist hier schon logisch? Zum formalen Umgang mit der Logik
4. Warum stimmt das eigentlich ? Beweisverfahren
5. Herangehen an Aufgaben aus Informatik und Mathematik

Logik: Wahr oder falsch?

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Konstrukt, das wahr oder falsch sein kann.

Manchmal ist es leicht, den Wahrheitsgehalt einer Aussage herauszufinden:

1. Paris ist die Hauptstadt von Frankreich.
2. Mäuse lieben es, Kängurus zu jagen.

Die erste Aussage ist *offenkundig* wahr, die zweite ist falsch.
Die *Offenkundigkeit* hängt von unserem Weltwissen ab, wir wollen hiervon im Folgenden abstrahieren.
Beobachte: Die beiden Aussagen lassen sich nicht (syntaktisch) in Teilaussagen zerlegen, sie sind vielmehr *atomar*.

Mathematische Aussagen

Wir betrachten die folgenden atomaren Aussagen:

- 2 ist Teiler von 12.
- 3 ist Teiler von 12.
- 4 ist Teiler von 12.
- 5 ist Teiler von 12.
- 6 ist Teiler von 12.
- 7 ist Teiler von 12.

Zwei dieser atomaren Aussagen sind falsch, die übrigen sind wahr.
Von den folgenden zusammengesetzten Aussagen ist nur eine falsch.

- 2 ist Teiler von 12 **oder** 5 ist Teiler von 12.
- 2 ist Teiler von 12 **und** 5 ist Teiler von 12.
- 2 **und** 3 sind Teiler von 12.
- **Falls** 2 Teiler von 12 ist, **dann** ist 4 Teiler von 12.
- **Falls** 5 Teiler von 12 ist, **dann** ist 2 Teiler von 12.
- 2 ist Teiler von 12 **oder** **sowohl** 5 **als auch** 6 sind Teiler von 12.

Vorsicht Umgangssprache

Die folgenden zwei zusammengesetzten Aussagen meinen offenbar dasselbe:

- 5 ist Teiler von 12 **und** 2 ist Teiler von 12.
- 2 ist Teiler von 12 **und** 5 ist Teiler von 12.

Umgangssprachlich ist das aber bei der “UND-Verknüpfung” der folgenden beiden atomaren Aussagen nicht der Fall:

- Otto wird krank.
- Der Arzt verordnet Otto Medizin.

Das UND hat in der Allgemeinsprache auch noch einen zeitlichen Aspekt. Dieser wird in der Aussagenlogik vernachlässigt.

Grundüberlegungen zur formalen Logik

Wir gehen davon aus, es gäbe eine Menge $\mathfrak{A}$ von *atomaren Formel*n.

Über einen Teil $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ dieser Formeln “wissen wir Bescheid”, d.h., wir können eine Abbildung $\beta : \mathfrak{D} \to \{0, 1\}$ angeben mit der Bedeutung:

- $\beta(a) = 0$, falls a falsch ist;
- $\beta(a) = 1$, falls a wahr ist.

$\mathfrak{D}$ ist also eine Menge definierter Aussagen, und β ist die entsprechende *Belegungsfunktion*. Wir wollen dann zusammengesetzte Aussagen untersuchen.

Formalitäten: Die Syntax der Aussagenlogik

(Aussagenlogische) Formeln werden durch einen induktiven Prozess definiert:

- Jede atomare Formel ist eine Formel.
- Ist F eine Formel, so auch $\neg F$. *Negation von* F
- Sind F und G Formeln, so auch $(F \wedge G)$. *Konjunktion von* F *und* G

Eine Formel, die als Teil einer Formel in F auftritt, heißt *Teilformel* von F.
$\mathfrak{F}$ bezeichne die Gesamtheit aller aussagenlogischen Formeln.

Beispiel: Sind A, B, C Formeln, so auch $F = \neg((\neg(A \wedge B) \wedge C) \wedge \neg C)$.
$(A \wedge B)$ ist eine Teilformel von F. $(A \wedge B) \wedge C$ ist keine Teilformel von F, ebensowenig $(B \wedge A)$.
Aufgabe: Wie sieht die Menge aller Teilformeln von F aus?
Muss eine Teilformel notgedrungen als Formel im induktiven Aufbau einer Formel auftreten?

Übliche Abkürzungen

Wir werden im Folgenden zwei weitere Elemente von Formeln als Abkürzungen bekannter Formeln kennenlernen.

- $(F \vee G)$ steht für $\neg(\neg F \wedge \neg G)$. *Disjunktion von F und G*
- $(F \rightarrow G)$ steht für $(\neg F \vee G)$. *Implikation*
- $(F \leftrightarrow G)$ steht für $((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$. *Äquivalenz*

Die Objekte $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ heißen auch *Junktoren*.
Sie dienen dazu, Teilformeln zu verbinden.
Aufgabe: Wofür steht $(F \leftrightarrow G)$ gemäß unserer ursprünglichen Formeldefinition?

Wir haben bislang nicht festgelegt, was diese Objekte bedeuten sollen.
Die Semantik der Aussagenlogik betrachten wir im Folgenden.

Die Semantik der Aussagenlogik

$\{0, 1\}$ ist die Menge der *Wahrheitswerte*.
Ggb.: Menge $\mathfrak{A}$ atomarer Formeln, $\mathfrak{F}$ von Formeln (über den atomaren Formeln $\mathfrak{A}$);
Teilmenge $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ mit Belegungsfunktion $\beta : \mathfrak{D} \to \{0, 1\}$.
$\mathfrak{E}$ bezeichne die aus $\mathfrak{D}$ aufbaubaren Formeln, also diejenigen Formeln aus $\mathfrak{F}$, die nur Elemente aus $\mathfrak{D}$ als atomare Formeln enthalten.
Wir erweitern β induktiv zu einer Belegungsfunktion $\widehat{\beta} : \mathfrak{E} \to \{0, 1\}$ wie folgt:

Ist $F \in \mathfrak{E}$ atomar, so setze $\widehat{\beta}(F) := \beta(F)$.
Andernfalls unterscheide zwei Fälle:

(a) $F = \neg G$. Setze $\widehat{\beta}(F) := \begin{cases} 0, & \widehat{\beta}(G) = 1 \\ 1, & \widehat{\beta}(G) = 0 \end{cases}$

(b) $F = (G \wedge H)$. Setze $\widehat{\beta}(F) := \begin{cases} 1, & \widehat{\beta}(G) = 1 \text{ und } \widehat{\beta}(H) = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Nach dieser sauberen Definition werden wir auch für $\widehat{\beta}$ vereinfachend β schreiben.

Ein Beispiel

Es sei $\mathfrak{D} = \{p, q\}$ vorgegeben mit $\beta(p) = 1$ und $\beta(q) = 0$.
Betrachte die Formel $F = ((p \to q) \vee p)$. Was liefert $\beta(F)$?
1. Rückführen auf die ursprüngliche Definition:
F steht für $((\neg p \vee q) \vee p)$ oder $\neg(\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg p)$.
2. Benutze die induktive Definition als rekursive Berechnungsvorschrift:
Um $\beta(F)$ zu berechnen, benötigen wir nach (a) $\beta(F')$ für $F' = (\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg p)$.
Dazu bestimme wegen (b): $\beta(G')$ und $\beta(H')$ mit $G' = \neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg q)$ und $H' = \neg p$.
Mit (a) und wegen $\beta(p) = 1$ folgt: $\beta(H') = 0$.
Die Definition der Semantik der Konjunktion zeigt, dass dann (unabh. von $\beta(G')$) $\beta(F') = 0$ gilt.
Wegen (a) folgt also: $\beta(F) = 1$.

Aufgabe: Berechnen Sie $\beta(G')$ (was wir uns ja "gespart" hatten).
In der Aufgabe auf Seite 8 hatten Sie im Grunde die Formel $J = (p \leftrightarrow q)$ "zurückgeführt".
Berechnen Sie mit obiger Belegungsfunktion $\beta(J)$.

Modelle und weitere semantische Begriffe

Ist F eine Formel, so bezeichne $\mathfrak{A}(F)$ die in F vorkommenden atomaren Formeln.
Mit $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ heißt $\beta : \mathfrak{D} \to \{0, 1\}$ *passend* zu F, falls $\mathfrak{A}(F) \subseteq \mathfrak{D}$.
Ist β eine zu F passende Belegungsfunktion, so heißt β ein *Modell* für F, falls $\beta(F) = 1$. Man schreibt dann auch: $\beta \models F$.
Eine Formel F heißt *gültig* oder eine *Tautologie*, falls jede zu F passende Belegungsfunktion ein Modell für F ist.
Eine Formel F heißt *unerfüllbar*, falls F kein Modell besitzt.

Satz: Eine Formel F ist genau dann gültig, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Beweis: F ist Tautologie gdw.

jede zu F (und somit zu $\neg F$) passende Belegungsfunktion ein Modell für F ist gdw.

keine zu $\neg F$ passende Belegungsfunktion ist ein Modell für $\neg F$ gdw.

$\neg F$ hat kein Modell gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar. $\square$

Beispiel: $(F \wedge \neg F)$ ist für jede Formel F unerfüllbar. (Tafel)

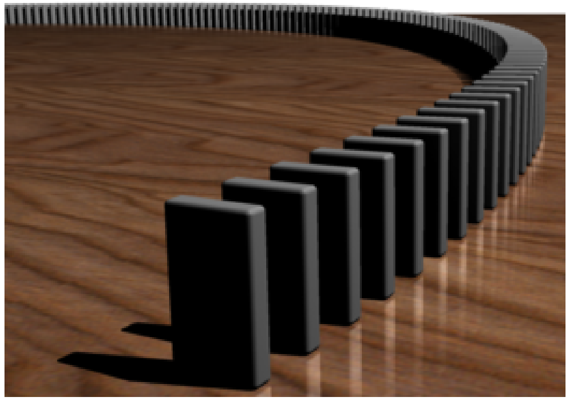
Modelle und weitere semantische Begriffe

Zwei Formeln F und G heißen *(semantisch) äquivalent* gdw. für jede Belegungsfunktion β, die sowohl für F als auch für G passend ist, gilt: $\beta(F) = \beta(G)$.
Man schreibt dafür auch: $F \equiv G$.
Achtung: Das bedeutet nicht notwendigerweise, dass $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}(G)$.

Satz: (*Idempotenz*) Für jede Formel F gilt: $F \equiv (F \wedge F)$.

Beweis: Da $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}((F \wedge F))$, können wir uns auf Belegungsfunktionen β mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(F)$ beschränken. Sei β solch eine passende Belegungsfunktion.
Gilt $\beta(F) = 1$, so ist nach Def. der Semantik der Konjunktion $\beta((F \wedge F)) = 1$.
Gilt $\beta(F) = 0$, so ist nach Def. der Semantik der Konjunktion $\beta((F \wedge F)) = 0$. □

Aufgabe: Beweisen Sie entsprechend die folgenden Sachverhalte:
Satz: (*Doppelte Negation*) Für jede Formel F gilt: $F \equiv \neg\neg F$.
Satz: (*Kommutativität*) Für alle Formeln F, G gilt: $(G \wedge F) \equiv (F \wedge G)$.

Induktion veranschaulicht: Der Dominoeffekt: 

Die Aufstellung gewährleistet:
Wenn der k-te Dominostein in der Reihe fällt, so auch der $k+1$-te.
Dies gewährleistet den Induktionsschritt.

Induktionsanfang: Jetzt fällt der erste Dominostein.

Folgerung: Schließlich werden alle Steine umgefallen sein.
Denn: zuerst fällt der erste, dann der zweite, dann der dritte, usf.

Eine logische Induktion

Lemma: Es sei n eine natürliche Zahl. Es sei F eine aussagenlogische Formel. Dann gilt für die Formeln

$$G_n := \underbrace{\neg \cdots \neg}_{n-\text{mal}} F \ :$$

(1) n ist gerade gdw. $F \equiv G_n$. (2) n ist ungerade gdw. $\neg F \equiv G_n$.

Beweis: Wir führen einen Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ und $n = 1$ gelten die Aussagen trivial.

Induktionshypothese (-voraussetzung): Wir nehmen an, die Aussage gilt für alle $n \leq m$.

Induktionsbehauptung: Die Aussage gilt für $n = m + 1$.

Betrachte daher $n = m + 1$. Klar: $n > 1$. Also gilt: $n - 2 \geq 0$ und $n - 2 < m$.

Außerdem ist n gerade gdw. $n - 2$ gerade.

Nach Definition gilt: $G_n = \neg\neg G_{n-2}$.

Nach dem Gesetz der doppelten Negation gilt: $G_n \equiv G_{n-2}$.

Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $n - 2$) folgt die Behauptung. $\square$

Die semantische Äquivalenz ist transitiv

Satz: Es seien F, G, H Formeln.
Gilt sowohl $F \equiv G$ als auch $G \equiv H$, dann gilt auch $F \equiv H$.

Beweis: Angenommen, sowohl $F \equiv G$ als auch $G \equiv H$ gelten.
Diskutiere eine beliebige, zu F und H passende Belegungsfunktion β.
β ist zumindest auf der Menge derjenigen atomaren Formeln $D_{F,H}$ definiert, die in F oder in H (oder auch in beiden Formeln) vorkommen.
Es bezeichne D_G die atomaren Formeln, die in G vorkommen, aber nicht in $D_{F,H}$ liegen.
Definiere nun $\overline{\beta}(p) := \begin{cases} \beta(p), & \text{falls} \quad p \in D_{F,H} \\ 1, & \text{falls} \quad p \in D_G \end{cases}$
Klar: $\overline{\beta}$ passt sowohl zu F als auch zu G als auch zu H.
Da $F \equiv G$ und $G \equiv H$, gilt ferner: $\overline{\beta}(F) = \overline{\beta}(G)$ und $\overline{\beta}(G) = \overline{\beta}(H)$.
Also ist $\overline{\beta}(F) = \overline{\beta}(H)$.
Diese Gleichheit wird nur durch die Belegung der atomaren Formeln in $D_{F,H}$ bedingt.
Daher gilt auch: $\beta(F) = \beta(G)$. Da β beliebig war, folgt $F \equiv H$. $\square$

Lemma: (*Absorption*) $F \equiv (F \wedge (F \vee G))$.

<u>Beweis:</u> Nach Definition der Disjunktion gilt:

$$(F \wedge (F \vee G)) \quad = \quad (F \wedge \neg(\neg F \wedge \neg G))$$

Sei nun β eine zu F und zu $H := (F \wedge \neg(\neg F \wedge \neg G))$ passende Belegung.

Fall 1.: Ist $\beta(F) = 1$, so gilt $\beta(\neg F) = 0$ und daher $\beta((\neg F \wedge \neg G)) = 0$, unabh. von $\beta(G)$.

Mithin ist $\beta(\neg(\neg F \wedge \neg G)) = 1$ und somit $\beta(H) = 1$.

Fall 2.: Ist $\beta(F) = 0$, so gilt $\beta(H) = 0$ unabh. von $\beta(\neg(\neg F \wedge \neg G))$.

Kein anderer Fall kann eintreten. $\square$

Die Art der soeben durchgeführten Fallunterscheidung kann man systematisieren durch die Betrachtung von Wahrheitstafeln.
Beobachte hierbei, dass nur die Belegung der in den Formeln vorkommenden atomaren Aussagen von Interesse für den Wahrheitsgehalt einer Formel ist.
Enthält also eine Formel n solche verschiedenen atomaren Aussagen, so sind 2^n viele Fälle zu unterscheiden.

Wahrheitstafeln für die Grund-Junktoren

- Negation:

$\beta(F)$	$\beta(\neg F)$
0	1
1	0

- Konjunktion:

$\beta(F)$	$\beta(G)$	$\beta(F \wedge G)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstafeln für abgeleitete Junktoren

- Disjunktion:

$\beta(F)$	$\beta(G)$	$\beta(F \vee G)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

, denn

$\beta(F)$	$\beta(G)$	$\beta(\neg F)$	$\beta(\neg G)$	$\beta((\neg F \wedge \neg G))$	$\beta(\neg(\neg F \wedge \neg G))$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Aufgabe: Leiten Sie entsprechend die Wahrheitstafeln für $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ her.

De Morgansche Gesetze

Satz: Es seien F und G Formeln. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \neg(F \wedge G) &\equiv (\neg F \vee \neg G) \\ \neg(F \vee G) &\equiv (\neg F \wedge \neg G) \end{aligned}$$

Beweis: Betrachte die Def. der Disjunktion sowie die Doppelte Negation:

$$\begin{aligned} \neg(F \wedge G) \equiv \neg(\neg\neg F \wedge \neg\neg G) &= (\neg F \vee \neg G) \\ \neg(F \vee G) = \neg\neg(\neg F \wedge \neg G) &\equiv (\neg F \wedge \neg G) \end{aligned}$$

$\square$

Weitere Übung: Geben Sie alternativ einen Beweis über Wahrheitstafeln an.

Assoziativität der Konjunktion

Satz: Es seien F, G, H Formeln. Dann gilt: $((F \wedge G) \wedge H) \equiv (F \wedge (G \wedge H))$.

Beweis: Wir führen einen Wahrheitstafelbeweis (vollständige Fallunterscheidung):

$\beta(F)$	$\beta(G)$	$\beta(H)$	$\beta((F \wedge G))$	$\beta(((F \wedge G) \wedge H))$	$\beta((G \wedge H))$	$\beta((F \wedge (G \wedge H)))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$\square$

Hilfsüberlegung zum Ersetzbarkeitsstheorem

Lemma: Es seien F, G Formeln. Dann gilt $F \equiv G$ gdw. $\neg F \equiv \neg G$.

Beweis: Zunächst beobachte, dass D eine zu F und G passende Menge elementarer Formeln ist gdw. D zu $\neg F$ und zu $\neg G$ passt.

Sei β eine zu F und G (und somit zu $\neg F$ und $\neg G$) passende Belegung.

Gilt $\beta(F) = \beta(G)$, so gilt $\beta(\neg F) = \beta(\neg G)$ und umgekehrt aufgrund der Definition der Semantik der Negation.

Daher gilt die Behauptung. $\square$

Das Ersetzbarkeitsstheorem

Satz: Es seien F, G, H Formeln. Es sei $F \equiv G$ und F sei eine Teilformel von H.
H' entstehe durch Ersetzen von einem Vorkommen von F durch G.
Dann gilt: $H \equiv H'$.

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis über die Anzahl n der Junktoren in H.

Induktionsanfang: $n = 0$. D.h., H enthält gar keine Junktoren. Also ist H atomar. Daher muss $H = F$ sein. Daher gilt: $H' = G$. Nach Voraussetzung gilt: $F \equiv G$, also ist $H \equiv H'$.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gilt für alle Junktorenanzahlen $n \leq m$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Aussage für $n = m + 1 > 0$.

Gilt $H = F$, so folgt die Behauptung mit derselben Argumentation wie im Induktionsanfang.

Der Beweis vom Ersetzbarkeitsstheorem (Forts.)

Wir sind im Induktionsschritt.
Andernfalls gilt, da H nicht atomar: $H = \neg H_1$ oder $H = (H_1 \wedge H_2)$.
Beachte: H_1 und H_2 enthalten höchstens m Junktoren und F ist Teilformel von H_1 (oder von H_2).
Falls $H = \neg H_1$, so gilt für die aus H_1 durch Ersetzen von einem Vorkommen von F durch G entstehende Formel H_1' nach Induktionsvoraussetzung: $H_1 \equiv H_1'$. Wegen des vorigen Lemmas folgt: $H \equiv H'$ mit $H' = \neg H_1'$.
Sei nun $H = (H_1 \wedge H_2)$. Betrachte den Fall, dass ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird und so die Formel H_1' aus H_1 entsteht.
(Eine Ersetzung eines Vorkommens von F in H_2 kann man entsprechend diskutieren.)
Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung: $H_1' \equiv H_1$. Betrachte $H' = (H_1' \wedge H_2)$.

Aufgabe: Zeige abschließend, dass $H' \equiv H$. $\square$

Ergänzungen zum Ersetzbarkeitstheorem (zur Übung)

Satz: Es seien $F_1, \ldots, F_n$ Formeln. Angenommen, es gilt:

$$F_1 \equiv F_2, F_2 \equiv F_3, \ldots, F_{n-1} \equiv F_n.$$

Dann gilt: $F_i \equiv F_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. (*verallg. Transitivität der Äquivalenz*)

Hinweis: Induktionsbeweis.

Satz: Es seien F, G, H Formeln. Es sei $F \equiv G$ und F sei eine Teilformel von H. H' entstehe durch Ersetzen von einem oder mehreren Vorkommen von F durch G. Dann gilt: $H \equiv H'$.

Hinweis: Induktionsbeweis mit Ersetzbarkeitstheorem und dem vorigen Satz.

Satz: Es seien F und G äquivalente Formeln mit den Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$. F' entstehe aus F (und entsprechend entstehe G' aus G) durch konsequentes Ersetzen von $\wedge$ durch $\vee$ und umgekehrt. Dann gilt: $F' \equiv G'$. (*Dualitätssatz*)

Hinweis: Induktionsbeweis.

Wie kann man die Gesetze anwenden?

Aus dem Dualitätssatz folgt sofort:

- Das Kommutativitätsgesetz der Disjunktion.
- Das Assoziativitätsgesetz der Disjunktion.
- Ein zweites Absorptionsgesetz: $F \equiv (F \vee (F \wedge G))$.
- Es gelten zweierlei Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} ((F \vee G) \wedge H) &\equiv ((F \wedge H) \vee (G \wedge H)) \\ ((F \wedge G) \vee H) &\equiv ((F \vee H) \wedge (G \vee H)) \end{aligned}$$

  Es genügt, eines der Gesetze durch Wahrheitstafelbeweis nachzuweisen (Dualität).

Noch ein paar Gesetze zur Unerfüllbarkeit bzw. Tautologie

Es seien F und G Formeln.

- Ist F eine Tautologie, so gilt:

$$\begin{aligned} F &\equiv (F \vee G) \\ G &\equiv (F \wedge G) \end{aligned}$$

- Ist F unerfüllbar, so gilt:

$$\begin{aligned} G &\equiv (F \vee G) \\ F &\equiv (F \wedge G) \end{aligned}$$

Eine Anwendung

Es seien A, B, C Formeln.
Dann gilt: $((A \vee (B \vee C)) \wedge (C \vee \neg A)) \equiv ((B \wedge \neg A) \vee C)$.

<u>Beweis:</u> Wir benutzen unsere hergeleiteten Regeln.

$$
\begin{aligned}
((A \vee (B \vee C)) \wedge (C \vee \neg A)) &\overset{\text{AG/ET}}{\equiv} (((A \vee B) \vee C) \wedge (C \vee \neg A)) \\
&\overset{\text{KG/ET}}{\equiv} ((C \vee (A \vee B)) \wedge (C \vee \neg A)) \\
&\overset{\text{DG}}{\equiv} (C \vee ((A \vee B) \wedge \neg A)) \\
&\overset{\text{DG/ET}}{\equiv} (C \vee ((A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A))) \\
&\overset{\text{unerf./ET}}{\equiv} (C \vee (B \wedge \neg A)) \\
&\overset{\text{KG}}{\equiv} ((B \wedge \neg A) \vee C)
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt mit der verallgemeinerten Transitivität der Äquivalenz. □

Aufgabe: Überprüfen Sie auf Äquivalenz: $(A \to (B \to C))$ und $((A \to B) \to C)$.

Mehr aus der Logik

- Formale Logik ist eine der Grundlagen der Informatik.
- Es gibt zwei Zugänge zu Beweisen über logische Sachverhalte:
  - Semantische Ebene: Argumentiere über Belegungen.
  - Syntaktische Ebene: Kalküle / Algorithmen zum Nachweis der Wahrheit von Formeln.

    Das klappt (erstaunlicherweise) für die Aussagenlogik.

    Es gibt Algorithmen zum “Nachrechnen” der Gültigkeit von Formeln der Aussagenlogik.
- Erweiterungen durch Quantoren $\forall$ (für alle) und $\exists$ (es gibt). Damit lässt sich viel mehr ausdrücken. Allerdings gibt es keine Algorithmen zur Beantwortung der Gültigkeitsfrage für Formeln.

Die “Hausaufgaben” sind in die Foliensammlung integriert.

Sie finden Sie auf den Folien Seite 7, Seite 8, Seite 10, Seite 12, Seite 18, Seite 23, Seite 24, Seite 27.

Kurz zur Literatur:
Das meiste von der Veranstaltung heute finden Sie in:
Uwe Schöning: Logik für Informatiker. Spektrum Lehrbuch.