Formale Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/24

Universität Trier

Henning Fernau
Mitarbeiter: Kevin Goergen, Kevin Mann
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

$\boxed{\textbf{Ziele / Gründe}}$ für diesen Kurs

Viele Studierende haben Schwierigkeiten mit formalen Denkweisen.

Schule und Uni liegen in Mathematik und Informatik oft weit auseinander:
Unterrichtsstil / -form, Tempo, Abstraktionsgrad.

$\leadsto$ (leider) zu hohe “Schwundquote” in den Informatikwissenschaften
Eher Verschärfung durch Bachelor-Master-Modell.

Dieser Vorkurs soll hier **Abhilfe** schaffen.

Probleme beim Studium ?!

Sprechen Sie mit uns:
Studierende gleicher Semester, Studierende höherer Semester, Fachschaftsrat, Fachstudienberater, Verwaltung, Assistenten, Professoren
Wir sind für Sie da!

Unterschätzen Sie nicht die Fächer und den Arbeitsaufwand:
zwei Stunden Infor-Mathe-matikvorlesung bedeutet stets mindestens denselben Zeitaufwand "im stillen Kämmerlein" (plus Bearbeitung der Übungen).
Besuchen Sie Vorlesungen und Übungen persönlich.

Schieben Sie Lücken nicht "auf die lange Bank".
Gestehen Sie sich Schwierigkeiten ein. Jede(r) hat sie.

Die Tatsache, dass sie hier sitzen, zeigt eigentlich schon Ihre Qualifikation:
Informatik ist kein "ich-weiß-nicht-so-recht"-Fach

Fachstudienberatung: Probleme beim Studium ?!

Lassen Sie es gar nicht erst dazu “richtig” kommen. . .

Fachstudienberatung:

Informatik: apl. Prof. Norbert Müller, früher H417;

zuständig für alle Spielarten der Informatik mit Ausnahme von:

Wirtschaftsinformatik: apl. Prof. Axel Kalenborn, früher H309;

Sprechstunden nach Absprache, auch digital

Einführungsveranstaltungen:

Alles neu in diesem Semester!

Auf dieser Seite finden Sie eine Zusammenfassung von Terminen https://www.uni-trier.de/?id=43290

STUDIENBERATUNG

Wenn Sie Fragen zu Ihrem Studium, egal ob Bachelor oder Master, Schwierigkeiten bei der Planung oder der Auswahl Ihrer Wahlfächer haben, dann können Sie sich gerne an Ihren Studienberater wenden.

Fachstudienberatung Informatik

apl. Prof. Dr. Norbert Müller

Fachstudienberatung Wirtschaftsinformatik

apl. Prof. Dr. Axel Kalenborn

Bei allgemeinen, nicht-fachspezifischen Fragen können eventuell auch die Beratungsangebote der zentralen Studienberatung weiterhelfen.

http://www.uni-trier.de/index.php?id=18969

ALLGEMEINE HINWEISE

Wenn du als Erstsemester Fragen hast, kannst du dich an uns wenden. Schreib einfach eine persönliche Mail an unsere Erstsemesterbeauftragte, schreib dem FSR eine Mail oder besuch uns im Büro H 508. Herr Dr. Müller oder die zentrale Studienberatung der Uni Trier helfen dir auch gerne weiter.

Grundsätzliche Informationen zum Studium an sich gibt es auf dieser Seite; die häufigsten Fragen findest du in den FAQ.

Am Anfang des Wintersemesters gibt es vor Vorlesungsbeginn von der Universität allgemeine Einführungsveranstaltungen für alle Studienanfänger.

In der Woche vor Vorlesungsbeginn findet in der Regel der **Vorkurs "Formale Grundlagen der Informatik"** von Herrn Fernau statt - nähere Informationen bei der unten verlinkten Übersicht über alle Erstiveranstaltungen. In der ersten Woche (Orientierungswoche) finden verschiedene Beratungsveranstaltungen statt: Neben der **Einführungsveranstaltung von Herrn Müller**, der **Studieninformationsveranstaltung** und dem Vorkurs von Herrn Fernau, an denen du unbedingt teilnehmen solltest, bieten wir eine Einführung in das Betriebssystem Linux an, auch **Linux-Crashkurs** genannt. Auf den Rechnern der Abteilung Informatik läuft ausschließlich Linux. Deshalb ist es wichtig, dass du über Basiswissen verfügst, um z. B. einen Editor in Linux zu starten. Der Linux-Crashkurs ist ein Muss für Studienanfänger, die noch nicht mit Linux/Unix-Systemen gearbeitet haben. Wann dieser stattfindet, wird spätestens in der Orientierungswoche bekannt gegeben. Im Crashkurs wird dir ein Skript ausgeteilt. Dieses kannst du auch als PDF herunterladen. Außerdem gibt es einen Vortrag von Christoph Lange

TOPLINKS

- CIP-Pools Informatik
- Stundenpläne
- DreamSpark (MSDNAA)
- Termine & Fristen
- Wegweiser Campus 2
- CIP Webmail

KONTAKT

Fachschaftsrat Informatik
Universität Trier
Campus 2, Raum H 508
Behringstraße 21, 54296 Trier
Telefon: 0651/201-2829
E-Mail: fsrinfo@uni-trier.de

$\boxed{\text{Organisatorisches}}$ für MO, MI, DO, FR

Vorlesung

8.30 bis 12.00 auf Campus II (mit Pause)

Ort: MO + FR: HS 12 (Hörsaalzentrum Campus II), MI + DO H11

anschließend Mittagspause, sodann

Gruppenarbeitstische

13-16 Uhr: Gelegenheit zur Gruppenarbeit zu ausgewählten Übungen, gemeinsam im H11

(als Sprechstunde ab 13.30, mit und von Mitarbeitern ab 14 Uhr)

Am Abend überdenken Sie bitte den Stoff; sie erhalten auch Gelegenheit zu weiteren Übungen.

Fragen sind auch vor den Vorlesungen möglich (ab 8:15 Uhr).

Formale Grundlagen der Informatik Gesamtübersicht

1. Rechnen: Gesetze und Regeln

2. Modellieren und Formalisieren:
   Keine Angst vor Formalismen . . . und etwas Logik

3. Warum stimmt das eigentlich? Logik und Beweisverfahren

4. Herangehen an Aufgaben aus Informatik und Mathematik

Ein Kaufhausproblem

Zwei Kaufhausleiter streiten sich:

A: Bei mir ist der Kunde noch König: Meine 20% Rabatt gibt es selbstverständlich auf den Gesamtpreis der Ware, also einschließlich der (vereinfacht) 20% Mehrwertsteuer.

B: Papperlapapp! Warum sollte der Kunde noch Steuern mit zahlen auf einen Preis, der eh nachher reduziert wird? Bei mir wird erst rabattiert und dann die Mehrwertsteuer dazugerechnet.

Bei wem sollten wir ein rabattiertes, vor Steuern für 100 Euro ausgewiesenes Modell erwerben?

Ein Kaufhausproblem — Herangehensweise

Lesen wir die Aufgabe genau durch. Was sind die wesentlichen Punkte?

Rechnen wir das Beispiel für A und B aus.

Was fällt auf?

Ist das Zufall? Wir prüfen weitere Beispiele.

Wie können wir die Aufgabenstellung verallgemeinern?

Was ist der eigentliche Grund für unsere Beobachtungen?

Rechengesetze I

Eine zweistellige Verknüpfung $\circ$ (z.B.: $\circ = +$ oder $\circ = \cdot$) heißt *kommutativ* genau dann, wenn für alle a, b gilt

$$a \circ b = b \circ a$$

Beispiele

Als Verknüpfungen auf den reellen Zahlen sind Addition und Multiplikation kommutativ, siehe das Kaufhausbeispiel.
Anschaulich ist das Parallelogramm bei der Vektoraddition, welches die Kommutativität dieser Operation versinnbildlicht.

Die Subtraktion und Division sind hingegen nicht kommutativ, denn es ist z. B.

$$2 - 3 = -1 \quad \neq \quad 1 = 3 - 2.$$

Auch die Potenz ist nicht kommutativ, da z. B.

$$2^3 = 8 \quad \neq \quad 9 = 3^2$$

gilt.

Fabel vom klugen Wolf und den neun dummen Wölfen

ein mathematischer Lehrtext aus der Zeit Mitte des 3. Jahrtausends v. Chr. (es gibt wohl auch kaum ältere Schultexte), den die Schüler einer **Schule in Sumer**, einem sogenannten Tafelhaus, abschreiben mussten.
Er behandelt das Kommutativgesetz der Addition. Interessant zu lesen . . .

Es brechen zehn Wölfe in einen Schafpferch ein und stehlen zehn Schafe.
Der kluge Wolf schlägt vor zu teilen, und zwar gerecht.
Die neun anderen Wölfe, vor Fressgier ganz dumm, fragen, was das bedeute.
Der kluge Wolf schlägt vor, so zu teilen, dass immer zehn herauskommt.
“Ihr neun Wölfe bekommt ein Schaf, dann seid ihr zusammen zehn. Ich und neun Schafe — macht ebenfalls zehn. Stimmt das etwa nicht?”
“Stimmt genau.” sagen die neun Wölfe und stürzen sich auf das Schaf, das ihnen der kluge Wolf hinschiebt.
Sie fressen, während der schlaue Wolf die anderen neun Schafe wegschleppt.

Didaktik

Mathematik “bei den Alten” (ausschließlich) anhand von **Beispielen**.
Das ist sehr anschaulich, aber auch sehr langatmig.
Auch Schulmathematik arbeitet oft vom Konkreten zum Abstrakten.
Mathematik hat historisch gesehen immer so gearbeitet.

Vorteile der Abstraktion:
Konzentration auf das Wesentliche / Erkenntnis des Wesentlichen
Möglichkeit einer sehr kompakten, aber “ungeschichtlichen” Darstellung von Mathematik.

$\rightsquigarrow$ Uni-Mathematik ist sehr viel **konzentrierter** als Schulmathematik.

$\rightsquigarrow$ Ihre **unausgesprochene und ständige** Aufgabe: **Spezialisieren** Sie, was Ihnen zu abstrakt erscheint, durch geeignete, selbst gewählte **Beispiele**.

Wenn Sie das können, merken Sie, dass Sie den Stoff verstanden haben.

Rechengesetze II

Eine zweistellige Verknüpfung $\circ$ heißt *assoziativ* genau dann, wenn für alle a, b, c gilt

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Beispiele

Als Verknüpfungen auf den reellen Zahlen sind Addition und Multiplikation assoziativ, z.B.:

$$(2+3)+7 = 5+7 = 12 \quad = \quad 2+(3+7) = 2+10 = 12.$$

Die Subtraktion und Division sind hingegen nicht assoziativ, denn es ist z. B.

$$2-(3-1) = 0 \quad \neq \quad (2-3)-1 = -2.$$

Auch die Potenz ist nicht assoziativ, da z. B.

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256 \quad \neq \quad 64 = 4^3 = (2^2)^3$$

gilt.

Rechengesetze III

Distributivgesetze geben an, wie sich zwei Verknüpfungen, zum Beispiel Multiplikation $(\cdot)$ und Addition $(+)$, bei der Auflösung von Klammern zueinander verhalten.
Man unterscheidet linksdistributiv und rechtsdistributiv:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(linksdistributiv)}$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \text{(rechtsdistributiv)}$$

Beispiele bei reellen Zahlen:

$$6 \cdot 16 = 6 \cdot (10 + 6) \quad = \quad 6 \cdot 10 + 6 \cdot 6 = 60 + 36 = 96$$

$$5 \cdot (7 + 3) = 5 \cdot 10 = 50 \quad = \quad 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3 = 35 + 15 = 50$$

Weitere Beispiele für Distributivgesetze DG

Für reelle Zahlen a, b, c gilt:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{(linksdistributiv)}$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \quad \text{(rechtsdistributiv)}$$

Aufgaben:

Kennen Sie weitere Beispiele für Operatorenpaare, für die DG gelten ?
Kennen Sie Paare von Verknüpfungen, bei denen die DG <u>nicht</u> gelten ?
Wieso folgt für die reellen Zahlen die Rechts- aus der Linksdistributivität (bei dem Operatorpaar Addition / Multiplikation)?

Anwendungen der Rechengesetze

Kopfrechentricks:

$25 \cdot 19 = ??$

$$25 \cdot 19 = 25 \cdot (20 - 1) = 25 \cdot 20 - 25 \cdot 1 = 500 - 25 = 475$$

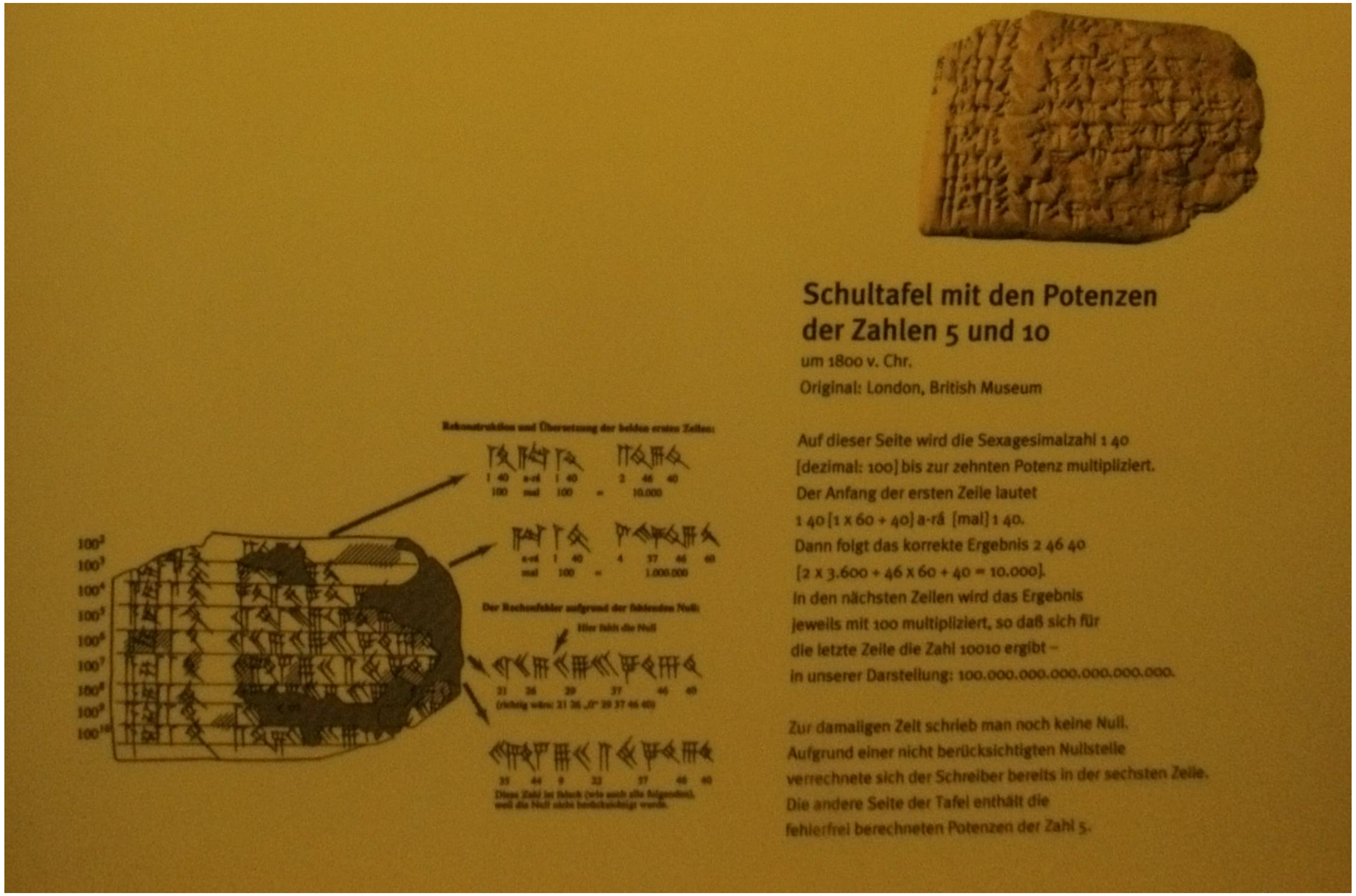
$36 + 55 + 64 + 33 + 12 = ??$

$$36 + 55 + 64 + 33 + 12 = (36 + 64) + (55 + (33 + 12)) = 100 + 100 = 200$$

In der Schulalgebra bezeichnet man die Verwendung des Distributivgesetzes zur Umwandlung einer Summe in ein Produkt als *Ausklammern* oder Herausheben. Der umgekehrte Rechenschritt wird als *Ausmultiplizieren* bezeichnet.

Gelten diese Rechengesetze auch auf Rechnern ?

Rechenfehler im Stein gemeißelt: Die Null ist wichtig beim Rechnen!



Zahldarstellungen

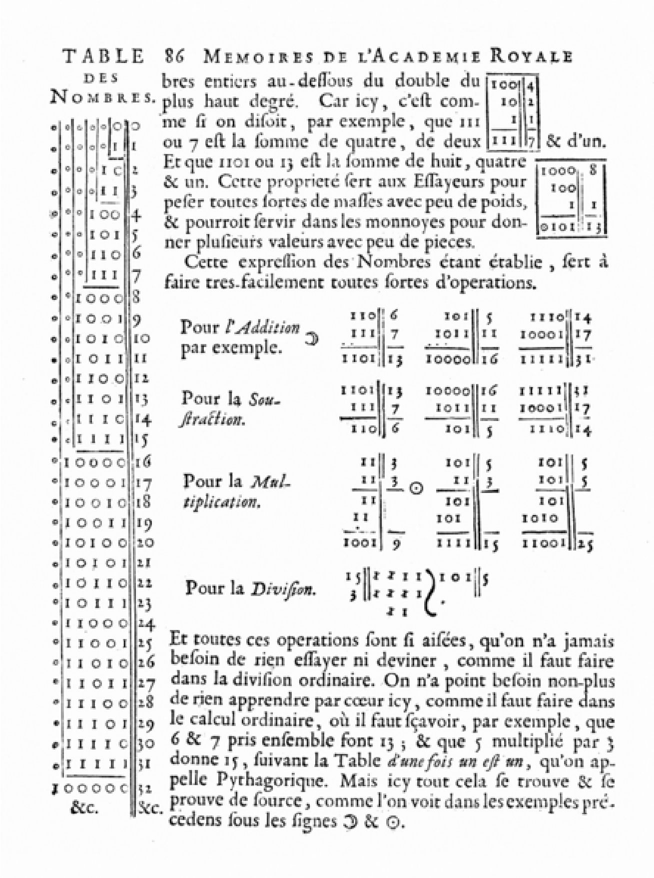


TABLE DES NOMBRES. 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16
10001	17
10010	18
10011	19
10100	20
10101	21
10110	22
10111	23
11000	24
11001	25
11010	26
11011	27
11100	28
11101	29
11110	30
11111	31
100000	32
&c.	&c.

bres entiers au-dessous du double du plus haut degré. Car icy, c'est comme si on disoit, par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre & un. Cette proprieté sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids, & pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pieces.

Cette expression des Nombres étant établie, sert à faire tres-facilement toutes sortes d'operations.

Pour l'*Addition* par exemple. ☽

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la *Soustraction*.

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la *Multiplication*. ⊙

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

Pour la *Division*. 15 / 3: 1111 / 11 = 101 (5)

Et toutes ces operations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut sçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris ensemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table *d'une fois un est un*, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela se trouve & se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précedens sous les signes ☽ & ⊙.

Das *Dualsystem* (*Zweiersystem*, *Binärsystem*), also das Stellenwertsystem mit der Grundzahl (Basis) Zwei, wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz 1703 in seinem Artikel

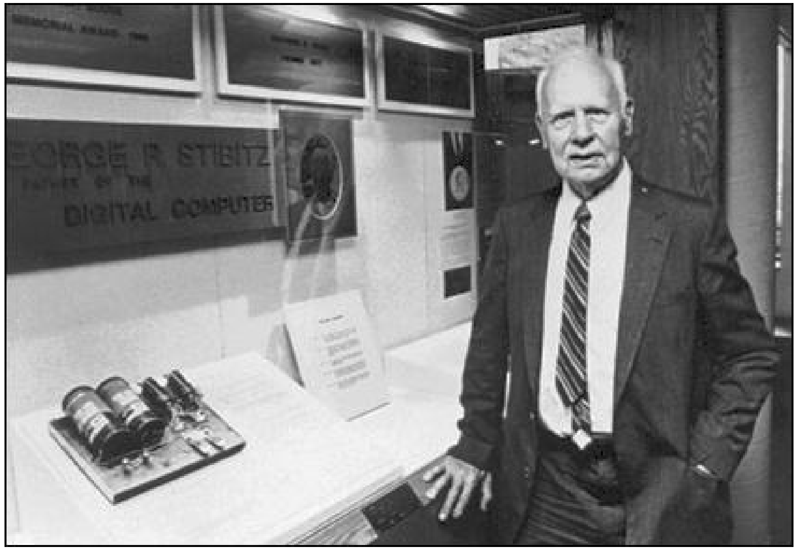
“Explication de l’Arithmétique Binaire” vollständig beschrieben.

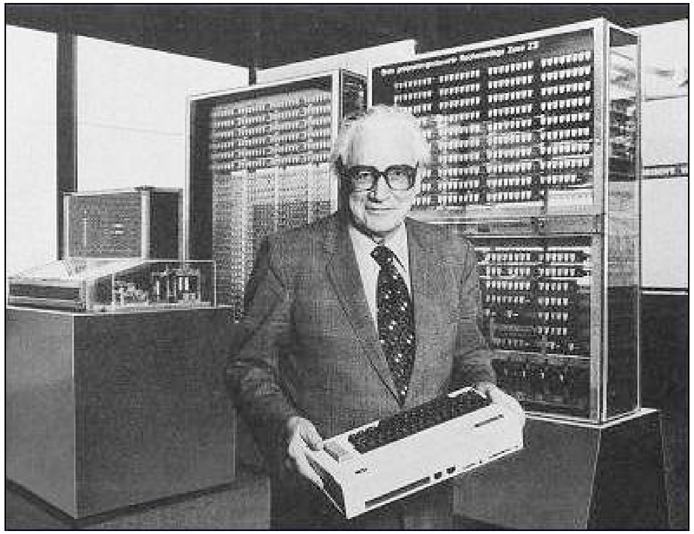
Die Bedeutung für Rechenanlagen erkannte 1854 George Boole.

Umgesetzt wurden diese Ideen von George Stibitz (Modell K, 1937) und Konrad Zuse (Z3, 1941).

Stibitz und Zuse: Pioniere der Informatik

Quelle: `http://www.kerryr.net/index.htm`





Dualsystem: Umwandlungen

Vom Dualsystem ins Dezimalsystem

Um eine Dualzahl in die entsprechende Dezimalzahl umzurechnen, werden alle Ziffern jeweils mit ihrem Stellenwert (entsprechende Zweierpotenz) multipliziert und dann addiert.

Beispiel:

$$1010_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 = 8 + 2 = 10_{(10)}$$

Vom Dezimalsystem ins Dualsystem

Es gibt mehrere Möglichkeiten der Umrechnung ins Dualsystem.
Im Folgenden ist die Divisionsmethode (Modulo-Methode) am Beispiel $41_{(10)}$ beschrieben:

$$\begin{array}{rcclll} 41 & :2 & = & 20 & \text{Rest} & \mathbf{1} \uparrow \\ 20 & :2 & = & 10 & \text{Rest} & \mathbf{0} \\ 10 & :2 & = & 5 & \text{Rest} & \mathbf{0} \\ 5 & :2 & = & 2 & \text{Rest} & \mathbf{1} \\ 2 & :2 & = & 1 & \text{Rest} & \mathbf{0} \\ 1 & :2 & = & 0 & \text{Rest} & \mathbf{1} \end{array}$$

Die entsprechende Dualzahl ergibt sich durch Notation der errechneten Reste von unten nach oben: $101001_{(2)}$.

Aufgaben: Sie können bereits programmieren? Dann schreiben Sie doch einmal ein Programm, dass eine Dezimalzahl einliest und seine Dualdarstellung ausgibt.

Dualzahlen in der elektronischen Datenverarbeitung

Darstellung von *Festkommazahlen* oder *ganzen Zahlen*.
Negative Zahlen werden vor allem als Zweierkomplement dargestellt, welches nur im positiven Bereich der Dualzahlendarstellung entspricht.
Um näherungsweise *rationale* oder gar *reelle Zahlen* darzustellen, werden vorzugsweise Gleitkommadarstellungen verwendet, bei der die Zahl normalisiert und in Mantisse und Exponent aufgeteilt wird. Diese beiden Werte werden dann in Form von Dualzahlen gespeichert.

Zweierkomplement

Beispielhafte Umwandlung der negativen Dezimalzahl -4 ins Zweierkomplement:
1. Vorzeichen ignorieren und ins Binärsystem umrechnen: $4_{(10)} = 00000100_{(2)}$.
2. Invertieren, da negativ: 11111011_2.
3. Eins addieren, da negativ: 11111011_2 + 00000001_2 = 11111100_2.
Mit n Bits lassen sich Zahlen von -2^{n-1} bis $+2^{n-1} - 1$ darstellen; bei 8 Bit: $-128_{(10)}$ bis $+127_{(10)}$.
Negative Zahlen erkennt man an der Eins als höchstwertigem Bit.
Addition und Subtraktion benötigen keine Fallunterscheidung.
Die Subtraktion wird auf eine Addition zurückgeführt.

$-4 + 3 = -1$ führt zu

$$\begin{array}{cl} & 11111100 \\ + & 00000011 \\ = & 11111111 \end{array}$$

$+4 - 4 = 0$ führt zu

$$\begin{array}{ccl} & & 00000100 \\ + & & 11111100 \\ = & (1) & 00000000 \end{array}$$

Problem: Überlauf: $+4 + 127 = +131$

$$\begin{array}{cl} & 00000100 \\ + & 01111111 \\ = & 10000011 \end{array}$$

Einfache Aufgaben

Berechnen Sie $63 - 55$, indem Sie:
(1) Die Dezimalzahlen 63 und 55 (systematisch) ins Zweiersystem umrechnen,
(2) sich einen geeigneten Zahlbereich aussuchen, um im Folgenden “verlustfrei” im Zweiersystem rechnen zu können,
(3) das Zweierkomplement von der ins Zweiersystem verwandelten Zahl 55 ausrechnen,
(4) diese dann (im Zweiersystem) zu der unter (2) ins Zweiersystem umgewandelten Zahl 63 addieren und schließlich
(5) das Ergebnis wieder (systematisch) ins Zehnersystem umrechnen.

Rechengesetze auf Rechnern (speziell: Ganzzahlarithmetik, Typ “integer”)

Kommutativität ✓

Assoziativität $(4+127)+(-4)$ liefert (zwischendurch) Überlauf, $4+(127+(-4))$ zeigt diese Schwierigkeit nicht.

Distributivität $(1+127)\cdot(-1)$ liefert (zwischendurch) Überlauf, $(-1)+(-127)$ zeigt diese Schwierigkeit nicht.

Untersuchen Sie:

(Wann) Kann man Überlauf bei Zwischenergebnissen ignorieren ?
Informieren Sie sich genauer über Gleitkomma-Arithmetik.
Welche Rechengesetze gelten hier (nicht) und warum ?
Speziell: In welcher Reihenfolge sollte man eine Reihe von Gleitkommazahlen addieren, will man ein möglichst genaues Ergebnis erzielen (und warum) ?!

Weitere Zahlsysteme

Das Zweiersystem kommt einer elektronischen Realisierung sehr entgegen:
an vs. **aus**.
Es gab (und gibt) aber auch alternative Vorschläge.
Der zweithäufigst umgesetzte (!) betrifft das *balancierte Ternärsystem*:
Satz: Jede ganze Zahl lässt sich darstellen als $\sum_{i=0}^{k} a_i 3^i$ mit $a_i \in \{-1, 0, 1\}$.
Beispiel: $2 = 1 \cdot 3^1 + (-1)3^0$, $-2 = (-1) \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$.
Aufgaben:
Stellen Sie drei weitere Zahlen in diesem System dar !
Wie kann man in diesem System addieren, negieren, subtrahieren ?

Dieses System ist auch als Spezialfall von “signed digits” bekannt:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Signed-digit_representation`.

Rechengesetze IV

Für eine zweistellige Verknüpfung $\circ$ heißt e *neutrales Element* gdw.
$x \circ e = e \circ x = x$ für alle x gilt.

0 ist neutrales Element der Addition, 1 ist neutrales Element der Multiplikation.
Daher heißen neutrale Elemente manchmal auch Nullelemente oder auch Einselemente.

Für eine zweistellige Verknüpfung $\circ$ mit neutralem Element e heißt y *inverses Element* von x gdw. $y \circ x = x \circ y = e$ gilt.

Jede reelle Zahl hat ein additives Inverses, oft *Gegenzahl* genannt.
Jede reelle Zahl x außer der Null hat ein multiplikatives Inverses x^{-1}, gerne als *Kehrwert* angesprochen.

Begriffserklärung 

Auf Georg Cantor geht folgende Definition für Mengen (Mannigfaltigkeiten) zurück:

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche *Elemente* der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Beispiel: $\emptyset$: die *leere Menge*

Schulklasse (als Menge von Schülerinnen und Schülern)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$: die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$: die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: die Menge der reellen Zahlen

Endliche Mengen gibt man gern durch Auflistung ihrer Elemente an.
Wiederholungen spielen dabei keine Rolle.

Beispiel: $\{0, 1\}$ enthält genau die beiden Zahlen 0 und 1, ebenso $\{0, 1, 1\}$.

Mengen sind wichtig für Rechenoperationen

Was soll denn überhaupt eine Operation sein?
Konkreter bei (zweistelligen) Rechenoperationen:
<u>Zwei Zahlen wird eine weitere Zahl in eindeutiger Weise zugeordnet.</u>

Aber was sind eigentlich Zahlen?

Wir hatten soeben Zahlenmengen erwähnt.

Helfen diese zu verstehen, was die unterstrichene Aussage meint?

Abgeschlossenheit

Als Erstes haben Sie unausgesprochen die natürlichen Zahlen kennengelernt. Sie haben angefangen, mit ihnen zu rechnen.

Erfahrung: Addiert man zwei natürliche Zahlen, so kommt wieder eine natürliche Zahl heraus. Ähnliches gilt für die Multiplikation.
Also: Zwei natürlichen Zahlen wird ihre Summe in eindeutiger Weise zugeordnet. Diese Summe ist wieder eine natürliche Zahl.

Man sagt auch: $\mathbb{N}$ ist unter Addition *abgeschlossen*.

Das gilt nicht für die Subtraktion. Deshalb wurde (vielleicht in der fünften Klasse) Ihr Zahlbereich erweitert. Also:
$\mathbb{N}$ ist unter Subtraktion nicht abgeschlossen.
$\mathbb{Z}$ ist aber unter Subtraktion abgeschlossen.
Abgeschlossenheit hängt von der Grundmenge ab!

Mengen sind wichtig für Rechenoperationen

Beispiel: Besitzt die Addition inverse Elemente?
Auf welcher Grundmenge betrachte ich denn $+$?
$(\mathbb{R}, +)$ besitzt inverse Elemente (Gegenzahl).
$(\mathbb{Q}, +)$ besitzt inverse Elemente (Gegenzahl).
$(\mathbb{Z}, +)$ besitzt inverse Elemente (Gegenzahl).
$(\mathbb{N}, +)$ besitzt im Allgemeinen **keine** inversen Elemente.

Für die Gültigkeit interessanter Eigenschaften von Rechenoperationen sind die betrachteten Zahlenmengen wesentlich!

Mengen sind wichtig für Beweise

Warum gilt denn eine Aussage?

Satz: Es gibt zwei irrationale Zahlen a, b, sodass a^b rational ist.

<u>Kürzere Formalschreibweise:</u> $\exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a^b \in \mathbb{Q}$.

<u>Beweis:</u> Betrachte $z = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Falls $z^z \in \mathbb{Q}$, können wir $a = b = z$ setzen.

Sonst gilt $z^z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Setze $a = z^z$ und $b = z$.

Dann ist: $a^b = (z^z)^z = z^{z \cdot z} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Q.E.D.

Wie sieht nun aber so eine Zahl aus?

Aufgaben

1. Gibt es eine endliche Menge natürlicher Zahlen, die gegen Addition abgeschlossen ist? (Begründung!)

2. Ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die größer als 7 sind, gegen Addition abgeschlossen? (Begründung!)

3. Können Sie die vorige Teilaufgabe verallgemeinern? Wie genau?

4. Finden Sie eine unendliche Zahlenmenge, die nur ganze Zahlen enthält, aber nicht alle beinhaltet, und welche gegen Subtraktion abgeschlossen ist.

Zur Quellenlage

Vieles finden Sie natürlich heutzutage im Internet.
Vorsicht: Noch mehr als bei Gedrucktem gilt: Nicht alles, was im Internet steht, ist deshalb richtig. Seien Sie ein kritischer Leser.
Das Internet ist zudem auch schlechter zitierbar:
Auf welche Version eines Wikipedia-Artikels beziehe ich mich?!

Immer noch besser: die gute alte Bibliothek (auch evtl. digital)
Speziell:
F. L. Bauer: Trits and Trytes—Ein früher ternärer Computer in der Sowjetunion. Informatik Spektrum 30 (2007), 279–284.
J. Mason, L. Burton, K. Stacey: Mathematisch denken; Mathematik ist keine Hexerei. Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, 2006.

Spielerisches: Das Ziegenparadoxon

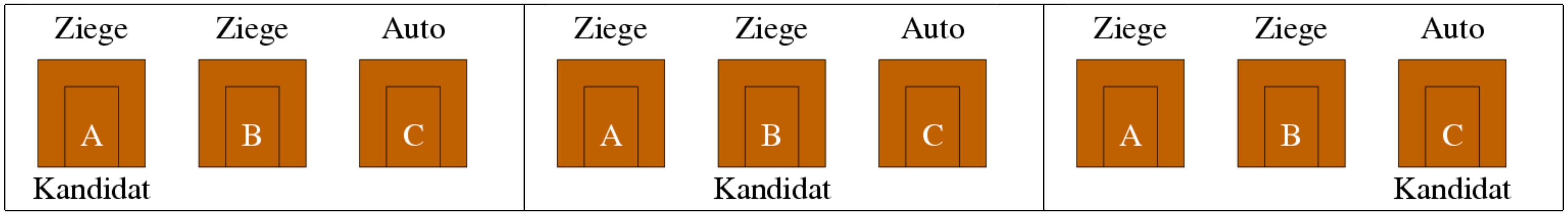
In einer Spielschau soll der Kandidat **eines von drei** aufgebauten Toren auswählen.
Hinter einem verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege, also Nieten (oder Trostpreise).
Folgender Spielablauf ist immer gleich und den Kandidaten vorab bekannt:
1. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
2. Der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, öffnet eines der beiden nicht vom Kandidaten ausgewählten Tore, und zwar immer eines, hinter dem sich eine Ziege befindet.
(Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.)
3. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu revidieren.

Wie soll der Kandidat sich nun entscheiden ?

G. von Randow: Das Ziegenproblem; Denken in Wahrscheinlichkeiten. Rowohlt, Reinbek 1992.

Schema für die (richtige) **Immer-Wechsel-Strategie**

Hier gibt es drei Fälle, anhand der drei vom Kandidaten gewählten Türen, bei fester aber beliebiger Verteilung von Ziegen und Auto:



Nur in einer der drei Fälle verliert der Kandidat bei dieser Strategie.
Hingegen verliert der Kandidat in zwei Fällen bei der alternativen Strategie, zu seiner ursprünglichen Wahl zu stehen.

Hätten Sie auch so gewählt ?

Wie stütze ich meine Intuition ?

Hat Sie obige Überlegung überrascht ?
Untersuchen Sie eine *Verallgemeinerung* oder Überspitzung des Problems:

Betrachte z.B. eine Million Tore; hinter genau einem befindet sich das Auto.
Nachdem der Kandidat ein Tor gewählt hat, öffnet der Moderator *alle anderen Tore bis auf eines*.
Hier ist es sofort einsichtig, dass der Kandidat wechseln sollte:
Die Wahrsch., mit dem zuerst gewählten Tor richtig zu liegen, ist sehr gering.

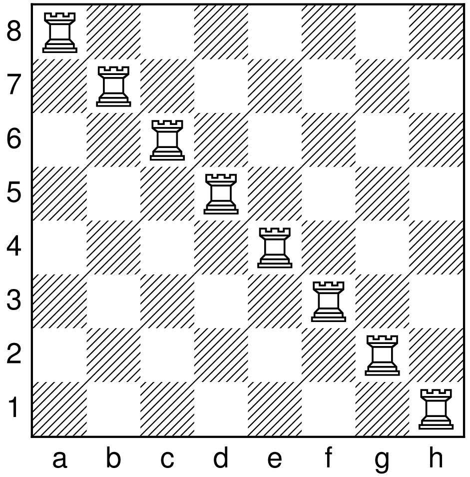
Wenn man die Zahl der Tore verringert, ändert sich auch nichts daran, dass der Kandidat das Tor wechseln sollte, nachdem der Moderator alle Nieten bis auf eine Niete aus dem Spiel genommen hat.

Insbesondere gilt dies auch für den Fall mit drei Toren.

Ein verwandtes Problem als Aufgabe

In einem Gefängnis sitzen drei Gefangene: A, B, C.
Ein Los wird gezogen, das allen die gleiche Chance gibt, begnadigt zu werden.
Es wird also genau einer der Gefangenen begnadigt werden.
Die Gefangene A bittet den Wärter, der das Ergebnis des Losentscheids kennt, ihm einen der Mitgefangenen B oder C zu nennen, der **nicht** begnadigt wird.
Der Wärter antwortet “B”.
Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass A begnadigt wird ?
Später besucht der Wärter C.
Der Wärter berichtet C die Begebenheit mit A, worauf nun C wie folgt reagiert:
“Gott sei Dank habe ich nicht zuerst gefragt !”
Wie sähe die Lage aus, wenn A und C gleichzeitig A’s Frage gestellt und dann die Antwort “B” erhalten hätten?

Spielerisches: Türme beim Schach



Aufgabe: Argumentieren Sie möglichst genau bei der Beantwortung der Fragen!

Links sehen Sie eine Turmaufstellung mit den folgenden Eigenschaften:

- Auf jedem Feld steht ein Turm oder
- ein Turm kann direkt dort hinziehen.

Fragen:

Wie viele Türme benötigt man (mindestens), um diese Eigenschaften zu erhalten?

Sind 8 Türme bei einem 8×8-Feld die kleinste Anzahl? Warum?

Schwierigere Fragen

- Wie viele Möglichkeiten gibt es für derartige minimale Turmaufstellungen?
- Ähnliche Fragen kann man für andere Schachfiguren stellen.
- Interessant wird es für andere (größere) Schachfeldgrößen.
- Umgekehrt kann man auch fragen, wie viele Türme (oder z.B. auch Damen) man maximal auf einem $n \times n$-Brett positionieren kann, sodass keine zwei sich schlagen können.
- Forscher an der TU Dresden haben 2016 durch massiven Rechnereinsatz (Spezialhardware) festgestellt, dass es 234.907.967.154.122.528 Möglichkeiten gibt, eine Maximalanzahl von Damen auf ein 27×27-Brett so zu platzieren, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können; hier finden Sie Näheres zu diesem Weltrekord.

Aufgaben kompakt

Die “Hausaufgaben” sind in die Foliensammlung integriert.
Hier wie in der Folgezeit gilt: Beißen Sie sich nicht gleich an einer Aufgabe fest, sondern schauen Sie erstmal, was Sie (gut) hinbekommen.
Das beste Niveau für Sie dürften Aufgaben sein, die Sie nicht gleich, aber doch nach ein paar Minuten herausbekommen.

Sie finden Sie auf den Folien Seite 16, Seite 21, Seite 24, Seite 25, Seite 26, Seite 34, Seite 39, Seite 40.