

Formale Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/24

Universität Trier

Henning Fernau

Mitarbeiter: Kevin Goergen, Kevin Mann

Universität Trier

fernau@uni-trier.de

Formale Grundlagen der Informatik

Gesamtübersicht

1. Rechnen: Gesetze und Regeln
2. Modellieren und Formalisieren:
Keine Angst vor Formalismen . . . und etwas Logik
3. Warum stimmt das eigentlich? Logik und Beweisverfahren
4. Herangehen an Aufgaben aus Informatik und Mathematik

Jargon

Für gute Beweise sind gute Sprechweisen unerlässlich.

Jargon—mathematische Formalismen—und ihr Nutzen wurden auszugsweise bereits gestern erklärt.

Hier wird diese Galerie etwas erweitert:

1. Finden Sie geeignete Platzhalter / Variablen:

Schauen Sie sich daraufhin nochmals die bislang durchgeführten Aufgaben an. Nicht immer sind x, y, z die einzig mögliche Wahl ;-)

2. Benutzen Sie mathematische Sprechweisen / Fachvokabular (richtig) !

Dieses ist oft über Jahrhunderte entstanden und hat sich so bewährt. Das sehen Sie am besten,

wenn Sie mal versuchen, mathematische Originalliteratur zu lesen, die älter als 150 Jahre ist. Das bereitet nicht nur Schwierigkeiten, weil damals viel auf Latein und Französisch geschrieben wurde...

Hilfreich sind verschiedenste Abkürzungen:

(a) logische Symbole: \wedge UND; \vee ODER AUCH; \implies IMPLIZIERT (daraus folgt; wenn... , dann); \iff GENAU DANN, WENN; ...

Quantoren: $\forall x$ FÜR ALLE x GILT; $\exists y$ FÜR EIN y GILT;

(b) Mengenschreibweise (das Cantorsche Paradies):

$x \in M$: x liegt in M ; $A \cup B$: Vereinigung; $A \cap B$: Schnitt, $A \subseteq B$: Mengeneinchluss / Inklusion; ...

(a) und (b) erscheinen gerne in Kombination:

Man verwendet gerne logische Ausdrücke, um Teilmengen zu beschreiben.

Man verwendet gerne Variablen aus verschiedenen Mengenbereichen: $\forall x \in M$:

Jargon entschlüsseln

Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Funktion $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Wie heißt gewöhnlich die Folge F , wenn ihr die folgend beschriebene Eigenschaft (X) zukommt ?

(1) $\forall n \in \mathbb{N} : F(n) \geq F(n + 1)$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : F(n) < F(n + 1)$

(3) $\exists c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |F(n)| < c$

(4) $\exists c \in \mathbb{R} \forall e \in \mathbb{R}_{>0} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \implies |F(n) - c| < e)$.

Wie heißt dann c gemeinhin ?

Etwas Zahlentheorie

Die *Zahlentheorie* beschäftigt sich im Wesentlichen mit den natürlichen Zahlen (oder auch den ganzen Zahlen) und ihren Eigenschaften. Ihr Gegenstand ist Ihnen daher seit Ihrer Kindheit vertraut.

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ heißt a *Teiler* von b (bzw. b *Vielfaches* von a) gdw. es ein $a' \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot a' = b$ gibt. Schreibweise: $a \mid b$: a teilt b

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für beliebige ganze Zahlen a, b, c, d, e :

1. $a \mid a$ und $(-a) \mid a$.
2. $1 \mid a$ und $(-1) \mid a$.
3. $a \mid 0$; aus $0 \mid b$ folgt $b = 0$.
4. $((a \mid b) \wedge (b \mid a)) \Rightarrow ((a = b) \vee (a = -b))$.
5. $((a \mid b) \wedge (b \mid c)) \Rightarrow (a \mid c)$.
6. $((a \mid b) \wedge (a \mid c)) \Rightarrow (a \mid (db + ec))$.
7. $((a \mid b) \wedge (c \mid d)) \Rightarrow (ac \mid bd)$.

Noch mehr Zahlentheorie

Für $a \in \mathbb{Z}$ sei T_a die Menge aller positiven Teiler von a . Enthält T_p für eine natürliche Zahl p genau zwei Elemente, so heißt p *Primzahl*. Ist p Primzahl und gilt $p|n$, so heißt p *Primteiler* von n .

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Satz: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ besitzt mindestens einen Primteiler.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussageform $A(n)$: “Jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$ besitzt einen Primteiler.” und beweisen Sie $\forall n A(n)$ mit Induktion.

Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des voranstehenden Satzes für den berühmten **Satz von Euklid**: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Herangehen

Schritt 1: Genaues Lesen / Was ist *gemeint* und *bekannt* ?

As I was going to St Ives
I met a man with seven wives
Each wife had seven sacks
Each sack had seven cats
Each cat had seven kits
Kits, cats, sacks and wives
How many were going to St Ives?

Herangehen Schritt 1: Genaues Lesen / Was ist *gemeint* und *bekannt* ?

Damenmahl:

Fünf Frauen haben sich zum Essen getroffen und sitzen um einen runden Tisch herum.

Frau Oßwald sitzt zwischen Frau Lutz und Frau Martin.

Erika sitzt zwischen Katy und Frau Neidlinger.

Frau Lutz sitzt zwischen Erika und Alice.

Katy und Doris sind Zwillingsschwestern.

Bettina hat als linke Nachbarin Frau Pieper und als rechte Frau Martin.

Geben Sie für jede Frau Vor- und Zunamen an.

Damenmahl:

Fünf Frauen haben sich zum Essen getroffen und sitzen um einen runden Tisch herum.

Frau Oßwald sitzt zwischen Frau Lutz und Frau Martin.

Erika sitzt zwischen Katy und Frau Neidlinger.

Frau Lutz sitzt zwischen Erika und Alice.

Katy und Doris sind Zwillingsschwestern.

Bettina hat als linke Nachbarin Frau Pieper und als rechte Frau Martin.

Was können wir getrost vernachlässigen?

Was sind die wichtigen Begriffe?

Welche Begriffe sind klar bzw. unklar?

Was folgt aus anderen Begriffen?

Können wir eine Skizze anfertigen?

Was sind die wesentlichen Informationen?

In welcher Reihenfolge sind die Informationen sinnvoll geordnet?

Damenmahl:

Fünf Frauen **haben sich zum Essen getroffen und** sitzen um einen runden Tisch herum.

Frau Oßwald sitzt zwischen Frau Lutz und Frau Martin.

Erika sitzt zwischen Katy und Frau Neidlinger.

Frau Lutz sitzt zwischen Erika und Alice.

Katy und Doris sind Zwillingsschwestern.

Bettina hat als linke Nachbarin Frau Pieper und als rechte Frau Martin.

Was können wir getrost vernachlässigen?

Was sind die wichtigen Begriffe?

Welche Begriffe sind klar bzw. unklar?

Was folgt aus anderen Begriffen?

Können wir eine Skizze anfertigen?

Was sind die wesentlichen Informationen?

In welcher Reihenfolge sind die Informationen sinnvoll geordnet?

Damenmahl:

Fünf Frauen sitzen um einen **runden Tisch** herum.

Frau Oßwald **sitzt zwischen** Frau Lutz und Frau Martin.

Erika **sitzt zwischen** Katy und Frau Neidlinger.

Frau Lutz **sitzt zwischen** Erika und Alice.

Katy und Doris sind **Zwillingsschwestern**.

Bettina hat als **linke Nachbarin** Frau Pieper und als **rechte (Nachbarin)** Frau Martin.

Was können wir getrost vernachlässigen?

Was sind die wichtigen Begriffe?

Welche Begriffe sind klar bzw. unklar?

Was folgt aus anderen Begriffen?

Können wir eine Skizze anfertigen?

Was sind die wesentlichen Informationen?

In welcher Reihenfolge sind die Informationen sinnvoll geordnet?

Welche Begriffe sind klar bzw. unklar ?



runder Tisch:

linke Nachbarin: bezeichnet **wohl** die unmittelbar links sitzende Person

rechte Nachbarin: bezeichnet **wohl** die unmittelbar rechts sitzende Person

sitzt zwischen: Wenn B zwischen A und C sitzt, so meint das **wohl** ebenfalls eine unmittelbare Nachbarschaft, da sonst die Aussage wertlos wird.

Was folgt aus anderen Begriffen ?

sitzt zwischen: Wenn B zwischen A und C sitzt, so bedeutet dies:

- entweder ist C rechte Nachbarin von B und B ist rechte Nachbarin von A,
- oder es ist C linke Nachbarin von B und B ist linke Nachbarin von A.

Wenn A und B **Zwillingschwestern** sind, so tragen sie **möglicherweise**, aber nicht zwingend, denselben Zunamen.

Damenmahl:

Fünf Frauen sitzen um einen runden Tisch herum.

2. Frau Oßwald sitzt zwischen Frau Lutz und Frau Martin.

4. Erika sitzt zwischen Katy und Frau Neidlinger.

3. Frau Lutz sitzt zwischen Erika und Alice.

5. Katy und Doris sind Zwillingsschwestern.

1. Bettina hat als linke Nachbarin Frau Pieper und als rechte (Nachbarin) Frau Martin.

Was können wir getrost vernachlässigen?

Was sind die wichtigen Begriffe?

Welche Begriffe sind klar bzw. unklar?

Was folgt aus anderen Begriffen?

Können wir eine Skizze anfertigen? (Tafel)

Was sind die wesentlichen Informationen?

In welcher Reihenfolge sind die Informationen sinnvoll geordnet?

Wie komme ich zum Ziel ?

Jetzt: Wir haben die Aufgabenstellung wirklich verstanden.

Manchmal ist dies schon fast gleichbedeutend mit dem Auffinden einer Lösung.

Aber nicht immer !

Dann muss ich jetzt nachdenken,
was genau gefragt ist. (Was ist das *Ziel* ?)

Viele Schwierigkeiten beim Bearbeiten einer Aufgabe rühren daher, dass man ziellos vorgeht.

Randfragen können (müssen aber nicht) ablenken.

Erinnerung: Bei der Schachbrettquadratzahlerei wurde folgende Frage “unterwegs” interessant:

— Wie groß ist A_1 , A_2 , A_3 bzw. B ?

Aufgabe

Gegeben sei ein Quadrat.

Ziehen Sie mehrere gerade Linien durch sein Inneres, so dass durch jede dieser Geraden das Quadrat in zwei Teilbereiche unterteilt wird.

Wie viele Farben benötigen Sie, um die dadurch abgegrenzten Bereiche so zu färben, dass durch gemeinsame Grenzlinien (nicht nur Grenzpunkte) benachbarte Flächen unterschiedlich gefärbt sind?

Versuchen Sie sich zunächst an einem nicht zu kleinen aber nicht zu großen Beispiel!

Machen Sie sich immer ausreichend Notizen!

Haben Sie eine *Vermutung* für den allgemeinen Zusammenhang?

Können Sie die Vermutung beweisen? [Hinweis: Induktion]

Welche Hilfsmittel sollte ich verwenden ?

Zu den wesentlichen Hilfsmitteln gehören:

- treffende Bezeichnungen
- geeignete Ordnung des Wissens
- Vereinfachungen der Aufgabenstellung
- Skizzen, Tabellen
- *Analogie*: Kenne ich ähnliche Fragestellungen?
- *Reduktion*: Ist mir ein gelöstes Problem bekannt, auf das ich die vorgelegte Aufgabe zurückführen kann?
- Spezialisierungen der Aufgabenstellung
(— Generalisierungen der Aufgabenstellung)

Ein weiteres Beispiel: Die Menagerie

Robert sammelt Eidechsen, Käfer und Würmer.

Er hat mehr Würmer als Eidechsen und Käfer zusammen.

Insgesamt hat er 12 Exemplare mit 26 Beinen.

Wie viele Eidechsen besitzt Robert?

Was wissen wir (über die eigentliche Aufgabenstellung hinaus)?

Würmer haben 0 Beine.

Eidechsen haben 4 Beine.

Käfer haben 6 Beine.

Ein weiteres Beispiel: Die Menagerie

Hätte Robert gar keine Eidechse (oder gar keine Käfer), so müssten alle Beine Käfern (oder aber Eidechsen) “gehören”.

Vielleicht ist dieser Fall schon durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen.

Das geht nicht, denn 26 ist nicht durch 4 und nicht durch 6 teilbar.

Mit dieser Spezialisierung haben wir auch schon einen möglichen Lösungsweg angefangen zu beschreiten: die vollständige Fallunterscheidung.

Hätte Robert nur eine Eidechse, gehörten 22 verbleibende Beine sämtlich zu Käfern, was nicht geht.

Mit zwei Eidechsen hätte Robert drei Käfer und mithin 7 Würmer.

Gibt es weitere Lösungen?

Eine Tabelle würde helfen. . .

oder etwas Algebra mit geeigneten Bezeichnungen.

Planungsphase —zusammengefasst

Was ist *bekannt*?

Welches *Ziel* muss verfolgt werden?

Welche *Hilfsmittel* setze ich (zunächst) ein?

Gerate ich später in **Schwierigkeiten**?

Dann ist evtl. die Planungsphase nochmals zu durchlaufen.

In jedem Fall sollte durchgehend *zielorientiert* gearbeitet werden.

Zielorientierung — ein Exkurs

Verlieren Sie während Ihres Studiums nicht die *Zielorientierung*: Sie möchten einen (guten) Abschluss in Ihrem informatischen Studienfach erzielen, um anschließend eine interessante Tätigkeit in Industrie oder Forschung aufnehmen zu können. Oder: **Was ist Ihr Ziel?**

Wir wollen Ihnen auf diesem Weg helfen, indem wir Ihnen einzelne Schritte (Studienmodule, Vorlesungen, Übungen, Aufgaben, ...) vorgeben.

Nehmen Sie Schwierigkeiten als Herausforderungen auf diesem Wege an.

Gehen Sie ihnen nicht aus dem Wege.

Lassen Sie sich, wenn möglich, nicht wesentlich von diesem Kurs ablenken, auch nicht durch scheinbar interessante und lukrative Angebote.

Nur an diesen immer komplexer werdenden Aufgaben können Sie wachsen.

Das lohnt sich in vielfacher Hinsicht: So sind Absolventen, die ihr Studium rasch und erfolgreich abgeschlossen haben, in der Regel auch die mit den besten Arbeits- und Lohn-Angeboten.

Durchführungsphase —zusammengefasst

Hier steckt natürlich die eigentliche Arbeit.

Orientieren und überprüfen Sie sich immer wieder an konkreten *Beispielen*, gerade bei “abstrakten Aufgaben”.

Machen Sie sich klare Notizen.

Halten Sie dabei fest, ob es sich um eine *Vermutung* oder eine *bewiesene Aussage* handelt.

Vermutungen ergeben sich oft aus der “natürlichen Frage” nach dem *Warum?*.

Ein weiteres Beispiel: Summen aufeinander folgender Zahlen

Einige Zahlen lassen sich als Summen von (wenigstens zwei) aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen ausdrücken, z.B.:

$$9 = 2 + 3 + 4$$

$$11 = 5 + 6$$

$$18 = 3 + 4 + 5 + 6$$

Kennzeichnen Sie die Zahlen mit dieser Eigenschaft!

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; einfache Beispiele

1 =	1 + ?	geht nicht, da 0 nicht positiv
2 =	??	geht nicht
3 =	1 + 2	✓
4 =	??	geht nicht
5 =	2 + 3	✓
6 =	1 + 2 + 3	✓
7 =	3 + 4	✓
8 =	??	geht nicht

Vermutung 1: Ungerade Zahlen (größer 1) lassen sich als Summe zweier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; eine erste Vermutung

Vermutung: Ungerade Zahlen (größer 1) lassen sich als Summe zweier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Kann ich das sogar *beweisen* ?

Klar: Ist $m > 1$ ungerade, so gibt es eine ganze Zahl $n \geq 1$ mit $m = 2n + 1$.

Daher gilt: $m = n + (n + 1)$, was zu zeigen war.

Wir können daher festhalten:

Hilfssatz 1: Ungerade Zahlen (größer 1) lassen sich als Summe zweier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; eine weitere Vermutung

1 =	1 + ?	geht nicht, da 0 nicht positiv
2 =	??	geht nicht
3 =	1 + 2	✓
4 =	??	geht nicht
5 =	2 + 3	✓
6 =	1 + 2 + 3	✓
7 =	3 + 4	✓
8 =	??	geht nicht

Vermutung 2: Zweierpotenzen lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Plan: Überprüfen der Vermutung

Ich sehe keine Möglichkeit, 16 oder 32 als Summen der geforderten Art darzustellen.

Um größere Zahlen zu überprüfen, würde evtl. ein kleines Programm helfen.

Wie können wir die Vermutung aber evtl. **beweisen**?

Nicht vergessen: **zielorientiert** arbeiten!

Was hülfe mir meine Vermutung, wenn sie richtig wäre?

Gibt es weitere Zahlen, die man nicht darstellen kann?

~> Wir brauchen mehr Beispiele!

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; weitere Beispiele

$$\begin{array}{rcl} 9 = & 4 + 5 & \checkmark \\ 10 = & 1 + 2 + 3 + 4 & \checkmark \\ 11 = & 5 + 6 & \checkmark \\ 12 = & 3 + 4 + 5 & \checkmark \\ 13 = & 6 + 7 & \checkmark \\ 14 = & 2 + 3 + 4 + 5 & \checkmark \\ 15 = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 & \checkmark \\ 16 = & ?? & \text{geht nicht} \end{array}$$

Verstärkte Vermutung 3: (1) Zweierpotenzen lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

(2) Zahlen, die keine Zweierpotenzen sind, lassen sich aber darstellen.

Plan: Verständnis der verwendeten Begriffe schärfen

Was unterscheidet eigentlich Zweierpotenzen von anderen positiven Zahlen?

Bekannt: Zweierpotenzen haben keine anderen Primfaktoren als zwei.

~> Alle ihre Teiler außer Eins sind gerade.

Ganze positive Zahlen, die keine Zweierpotenzen sind, müssen umgekehrt einen weiteren ungeraden Teiler außer Eins besitzen.

Da wir vorsichtig sind, halten wir dies vorerst als (wahrscheinlich doch richtige) **Vermutung 4** fest.

Was hülfe uns diese Vermutung für unser **Ziel**?

Ich brauche wieder Beispiele, vielleicht systematischer: Vielfache von Drei?!

“Vielfaches” ist ein natürlicher “Gegenbegriff” zu “Teiler”.

So diskutiere ich auch systematisch(er) einige gerade Zahlen.

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von Drei

$$3 = 1 + 2 \quad \checkmark$$

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad \checkmark$$

$$9 = 2 + 3 + 4 \quad \checkmark$$

$$12 = 3 + 4 + 5 \quad \checkmark$$

$$15 = 4 + 5 + 6 \quad \checkmark$$

$$18 = 5 + 6 + 7 \quad \checkmark$$

Fällt eine *Gesetzmäßigkeit* auf? (Suche nach *Strukturen*)

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von Drei

Vermutung 5: Vielfache von Drei (größer 3) lassen sich als Summe dreier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Beweis: Betrachte $m > 3$, $m = 3n$. $\leadsto n > 1$.

$m = 3n = (n - 1) + n + (n + 1)$ ist gewünschte Darstellung, da $n - 1 \geq 1$.

Wir halten fest:

Hilfssatz 2: Vielfache von Drei (größer 3) lassen sich als Summe dreier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Frage: Wie sieht das bei **anderen Vielfachen** aus??

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von Fünf

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 2 + 3 \quad \checkmark \\ 10 & = & 1 + 2 + 3 + 4 \quad \checkmark \\ 15 & = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \quad \checkmark \\ 20 & = & 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \quad \checkmark \\ 25 & = & 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \quad \checkmark \\ 30 & = & 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \quad \checkmark \end{array}$$

Fällt eine *Gesetzmäßigkeit* auf? (Suche nach *Strukturen*)

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von Fünf

Vermutung 6: Vielfache von Fünf (größer 10) lassen sich als Summe von fünf aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Beweis: Betrachte $m > 10$, $m = 5n$. $\leadsto n > 2$.

$m = 5n = (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2)$ ist gewünschte Darstellung, da $n - 2 \geq 1$.

Wir halten fest:

Hilfssatz 3: Vielfache von Fünf (größer 10) lassen sich als Summe von fünf aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Frage: Wie sieht das bei **anderen Vielfachen** aus??

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von k

Vermutung 7: Vielfache m von ungeraden Zahlen $k > 2$ ($m > k^2/2$) lassen sich als Summe von k aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Beweis: Betrachte $m > k^2/2$, $m = kn$. $\leadsto n > k/2$.

Da k ungerade, gilt: $k = (2\ell + 1)$. $\leadsto n > \ell$

$m = kn = (2\ell + 1)n = (n - \ell) + (n - \ell + 1) + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + \ell)$ ist gewünschte Darstellung, da $n - \ell \geq 1$.

Wir halten fest:

Hilfssatz 4: Vielfache m von ungeraden Zahlen $k > 2$ ($m > k^2/2$) lassen sich als Summe von k aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen darstellen.

Führen Sie ruhig einen Induktionsbeweis, wenn Ihnen die “Pünktchendarstellung” oben nicht behagt.

Schwierigkeit: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von k

Frage: Was ist mit “zu kleinen” Vielfachen ungerader Zahlen k ?

Beobachtung: Die Darstellung

$$m = kn = (2\ell + 1)n = (n - \ell) + (n - \ell + 1) + \cdots + n + (n + 1) + \cdots + (n + \ell)$$

gilt auch dann, nur dass $n - \ell$ evtl. negativ ist.

Beispiel: $m = 3 \cdot 1 = (1 - 1) + 1 + (1 + 1) = 0 + 1 + 2.$

Aha! Eine einzelne Null in der Summe “ganz links” stört nicht, sie kann einfach fortgelassen werden.

Beispiel: $m = 5 \cdot 1 = (1 - 2) + (1 - 1) + 1 + (1 + 1) + (1 + 2) = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 2 + 3.$

Aha! Negative Zahlen werden durch ihre Gegenzahlen aufgehoben.

Plan: Summen aufeinander folgender Zahlen; Vielfache von k

Hilfssatz 5: Vielfache m von ungeraden Zahlen $k > 2$ lassen sich als Summe von höchstens k aber mindestens zwei aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen darstellen.

Beweis: Hilfssatz 4 liefert die Behauptung für den Fall $m > k^2/2$.

Sei also $m = kn \leq k^2/2$, d.h., $n \leq k/2$.

Mit $k = 2\ell + 1$ heißt das: $n \leq \ell + 1/2$, und da n, ℓ ganzzahlig, folgt $n \leq \ell$.

\rightsquigarrow In der Summe $m = kn = (2\ell + 1)n = (n - \ell) + (n - \ell + 1) + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + \ell)$ gibt es eine Null.

Mit $J = \ell - n \geq 0$ gilt: $m = [-J + (-J + 1) + \dots + 0 + 1 + \dots + (J - 1) + J] + (J + 1) + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + \ell)$. Da der Ausdruck in eckigen Klammern stets Null liefert (Induktion?), folgt die Behauptung, denn es verbleiben mindestens zwei Summanden, nämlich n und $n + 1$.

Genauer gilt $J + 1 = \ell - n + 1 < n + \ell$, denn $1 < 2n$, da $k < 2m$, also enthält die Summe wenigstens zwei Summanden.

Damit hätten wir den zweiten Teil von **Vermutung 3** gezeigt.

Was ist mit dem ersten Teil ? \rightsquigarrow Untersuche Zweierpotenzen!

Plan: Beweisen der Vermutung

Vermutung 2: Zweierpotenzen lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

Angenommen, die Behauptung wäre falsch.

Dann gäbe es eine Zahl k mit: $2^k = x + (x + 1) \cdots + (x + m) = (m + 1)x + (0 + 1 + \cdots + m) = (m + 1)x + \frac{m(m+1)}{2}$ für geeignete positive ganze Zahlen x, m .

Man sieht unmittelbar, dass dann $k > 1$ sein muss.

Wäre m gerade, so gilt: $m = 2\ell$, und damit $2^k = (m + 1)(x + \ell)$, d.h., 2^k hätte einen ungeraden Teiler. \downarrow

Also ist m ungerade, wir haben daher eine gerade Anzahl von $(m + 1)$ aufeinander folgender ganzer Zahlen in der Darstellung.

Zählen wir die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. dieser Zahlen zusammen, so sind sie stets gleich groß, nämlich $2x + m$. Da m ungerade, ist $2x + m$ ein ungerader Teiler von 2^k . \downarrow

Heureka ! Damit ist gezeigt:

Satz: (1) Zweierpotenzen lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen darstellen.

(2) Zahlen, die keine Zweierpotenzen sind, lassen sich aber darstellen.

Damit wäre die Aufgabe vollständig bearbeitet.

“Sicherheitshalber” sollte jetzt aber eine **Rückblickphase** folgen. . .

(Dabei wird Vermutung 4 wieder auftauchen. . .)

Hinweis: Im Mason / Burton / Stacey ist ein anderer Lösungsweg skizziert.

Vermutungen: Wie kommen sie zustande?

Trauen Sie sich etwas zu !

Gesetzmäßigkeiten / Strukturen wollen ergründet werden.

Schwierigkeiten helfen, Vermutungen auszusprechen.

Protokollieren Sie Ihre Gedanken, garniert mit Wörtern wie:

Vielleicht..., *Warum* sollte (nicht) ..., *Versuchen* wir einmal ...

Aufgabe:

Welche Zahlen lassen sich als Differenzen von Quadratzahlen schreiben?

Rückblickphase — zusammengefasst

Stimmen alle meine Behauptungen Schritt für Schritt und insgesamt?
Kann ich mein Ergebnis möglichst unabhängig vom angegebenen Lösungsweg *überprüfen*?
Oder kann ich die Ergebnisse wenigstens anderen plausibel machen?

Was ist *bekannt*?
Welches *Ziel* muss verfolgt werden?
Welche *Hilfsmittel* setze ich (zunächst) ein?

Gerate ich später in **Schwierigkeiten**?
Dann ist evtl. die Planungsphase nochmals zu durchlaufen.
In jedem Fall sollte durchgehend *zielorientiert* gearbeitet werden.

Rückblickphase I — Test

Stimmen alle meine Behauptungen und Berechnungen?

Vollziehen Sie alle Ihre in die endgültige Lösung eingegangenen Schritte einzeln nochmals nach.
Habe ich alle Informationen / Voraussetzungen aus der Aufgabenstellung verwendet?

Wenn nicht, haben Sie evtl. etwas Neues entdeckt; bei (Haus-)Aufgaben ist es aber wahrscheinlich, dass Sie irgendetwas übersehen haben!

Habe ich alle Fragen aus der Aufgabenstellung beantwortet?

Allzugern wird ein Aufgabenteil übersehen in der Freude über das bisher Erreichte.

Kann ich mein Ergebnis möglichst unabhängig vom angegebenen Lösungsweg *überprüfen*?

Oder kann ich die Ergebnisse wenigstens (anderen) plausibel machen?

Sollte ich allgemeinere Resultate nochmals an konkreten weiteren Beispielen validieren?

Rückblickphase II — Nachdenken

Was waren die entscheidenden Ideen ?

Erfahrungen helfen naturgemäß bei der Lösung zukünftiger Aufgaben.

Was kann ich aus der nunmehr gelösten Aufgabe in meinen Erfahrungsschatz übernehmen?

Was folgt (über die eigentliche Aufgabenstellung hinaus) aus meiner Lösung?

Dies leitet sofort über in Teil-Phase III. . .

Rückblickphase III — Verallgemeinern

Kann ich meine Lösung in einen größeren (allgemeineren oder auch nur verwandten) Zusammenhang stellen?

Erinnern Sie sich, wie wir als Teilproblem vorhin die Summendarstellungen der Vielfachen von Drei, Fünf, . . . untersuchten.

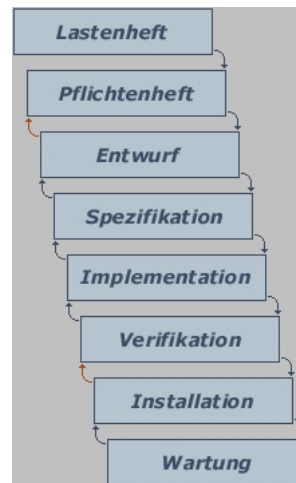
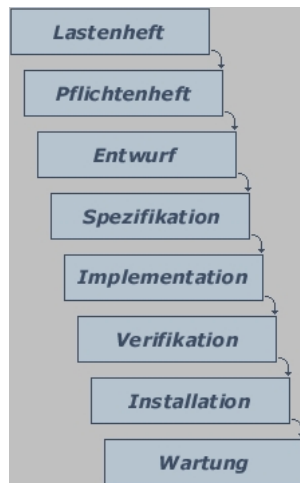
Gibt es andere Lösungswege, Herangehensweisen?

Auch der Vergleich mit Lösungen von Freunden oder beim Vorrechnen hilft hier.

Wie beeinflussen Änderungen in den Voraussetzungen die daraus zu ziehenden Folgerungen?

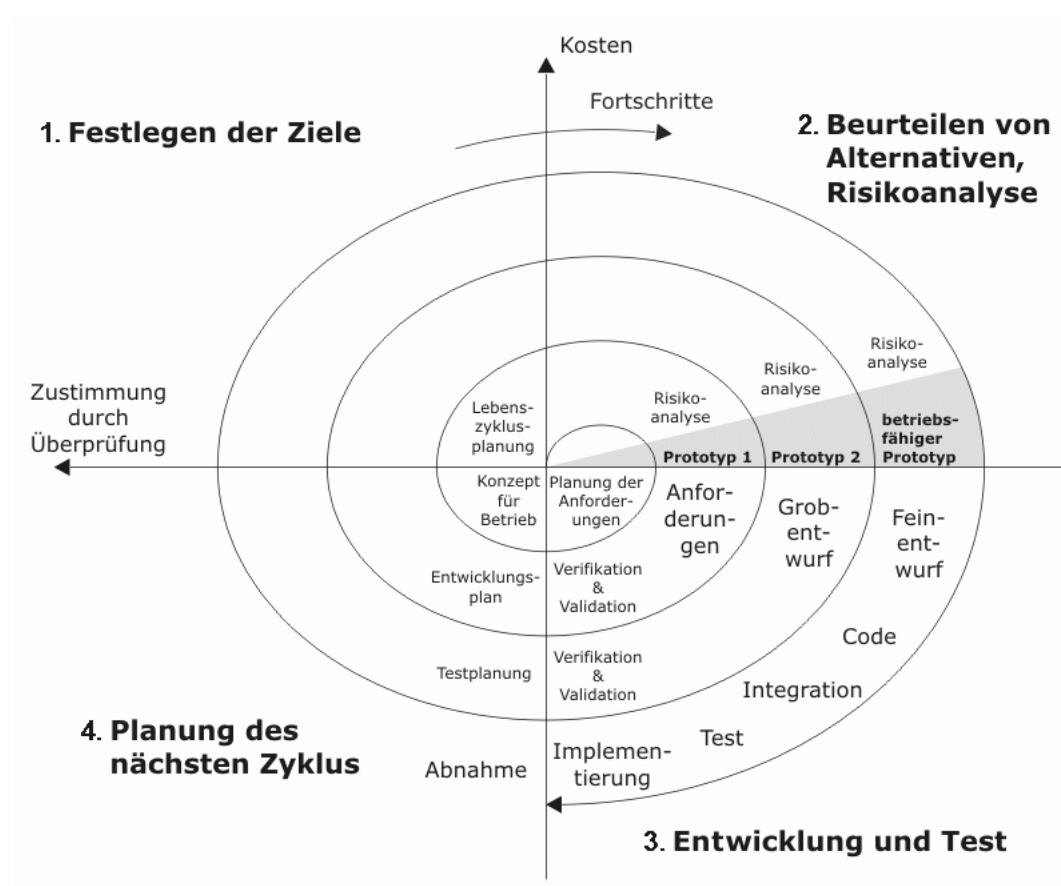
Wasserfallmodell der (iterativen) Softwareentwicklung

Einfachste (Ur-)form Einbau von Rückkopplungen



Was ist ein *Pflichtenheft*? Das Pflichtenheft legt (in umgangssprachlicher Form) die Anforderungen an die (noch zu erstellende) fertige Software fest. Ziel ist es, aus den Anforderungen des Kunden (niedergelegt im *Lastenheft*) eine möglichst vollständige konsistente und eindeutige Produktdefinition anzufertigen.

Spiralmodell der Softwareentwicklung



Eine letzte Aufgabe

Welche positiven ganzen Zahlen haben eine ungerade Zahl von Teilern?

(1) Planung: Was ist gesucht? Beispiele! Auffälligkeiten?

Hierzu vielleicht hilfreich: Einschränkung auf bestimmte Zahlen.

Wie viele Teiler hat denn 2^n für $n = 0, 1, \dots$?

(2) Durchführung: Geben Sie nicht auf, bevor Sie eine Vermutung haben.

Formulieren Sie Ihre Meinung so präzise wie möglich.

Beweisen Sie Ihre Vermutung!

(3) Rückblick: Gibt es eine Zahl mit genau 13 Teilern?

Verallgemeinern Sie die letzte Frage!

Eine allerletzte Aufgabe

Diese wurde wohl zuerst in Leonardo Pisanos Buch von 1202 veröffentlicht:
(LP ist bekannter als Herr Fibonacci!)

Ein Mann gelangt in einen wunderbaren Garten durch sieben bewachte Tore.

Im Garten pflückte er viele Äpfel und steckte sie sich ein.

Dem Wächter des ersten Tores musste er allerdings die Hälfte aller eingesammelten Äpfel überlassen, und noch einen zusätzlich.

Ebenso gab er dem zweiten Torwächter die Hälfte aller Äpfel, die er noch bei sich hatte, und noch einen zusätzlich, usf.

Als er das letzte, das siebente Tor, passiert hatte, hatte er noch einen Apfel bei sich.

Wie viele Äpfel hatte der Mann ursprünglich gepflückt?

Allgemeiner gefragt: Wie viele Äpfel $a(t)$ muss man in einem Garten (mindestens) pflücken, in den man durch t in der beschriebenen Weise bewachte Tore gelangt, wenn man nach Verlassen des letzten Tores noch einen ganzen Apfel übrig haben will?

Noch allgemeiner: Jeder Wächter könnte ja von den n noch vorhandenen Äpfeln einen Anteil $\alpha \cdot n + c$ für eine rationale Zahl $\alpha \in (0, 1)$ und eine natürliche Zahl c einfordern.

Quelle: W. Hower: Diskrete Mathematik, Grundlage der Informatik, Oldenbourg, 2010.

Weitere Literaturhinweise

Stärker ingenieurmäßig ausgerichtete Informatik-Bereiche (Geo-Informatik z.B.) oder auch die hiesige Mathematik werden eine Betonung der Analysis vermisst haben.

Dies kann man sehr schön im Selbststudium nachholen mit Hilfe von:
A. Riekers, K. Bräuer: Einladung zur Mathematik, Logos Verlag, 2004.
Zu allen Übungsaufgaben gibt es Musterlösungen im Internet.

Es sind auch viele Abschnitte als besonders vorkurstauglich aufgeführt.

Zum Schluss: In dieser VL haben sich nur wenige Aufgaben versteckt (wo?); vielleicht finden Sie ja noch Interessantes aus den vorigen VLs dieser Woche.

Ansonsten:

Schönes Wochenende und ein erfolgreiches Studium in Trier!