Fernau / Gulan
Universität Trier

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Strukturen und Logik

Aufgabenblatt 10

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Aufgabe 45 (Laufzeit) (5+2+2+4 Punkte)

1. Die Relation O sei derart definiert, dass für Funktionen f, g gilt:

$$O(f, g) \Leftrightarrow f = \mathcal{O}(g)$$

   Untersuchen Sie O auf Reflexivität, Transitivität und Symmetrie. Ist O Quasi-, Halb- oder Wohlordnung?

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) $2^{n+1} = \mathcal{O}(2^n)$

   (b) $2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$

   (c) $2^{\ln n} = \Theta(n)$

Aufgabe 46 (Zählen und Rekursion) (3+6 Punkte)

Wir betrachten Flaggen mit n horizontalen Streifen mit den Farben gelb, grün und rot. Verständlicherweise sollen benachbarte Streifen unterschiedliche Farben bekommen.

1. Bezeichne a_n die Zahl der verschiedenen n-Streifen Flaggen. Bestimmen Sie a_n und begründen Sie Ihre Antwort.

2. Ein Problem unserer Flaggen ist, dass die Gefahr besteht, “oben” und “unten” zu verwechseln. Damit keine Flagge falsch herum gehisst wird, wird verboten, dass die Farben des unteren und oberen Streifens gleich sind. (Stellen Sie sich den Skandal bei Olympischen Spielen vor.)

   Sei b_n die Zahl der somit zulässigen Flaggen mit n Streifen. Geben Sie eine explizite (nicht-rekursive) Darstellung für b_n und begründen Sie Ihre Hypothese. *Hinweis:* Vermutlich fällt es Ihnen nicht so schwer, eine rekursive Darstellung von b_n zu finden. Hilfreich dazu ist die folgende Identität: $b_n = a_n - b_{n-1}$ für $n \geq 2$. Die Richtigkeit der Formel sollten Sie natürlich auch begründen, sofern Sie sie verwenden.

Aufgabe 47 (algebraische Strukturen) (3+3+3 Punkte)

1. Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der reellen Zahlen größer Null. Zeigen Sie, daß die natürliche Logarithmusfunktion $\ln$ ein Morphismus von $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ nach $(\mathbb{R}, +)$ ist. Ist $\ln$ Mono-/Epi-/Iso-/Automorphismus?
2. Sei $(M, \circ, 1)$ ein Monoid, M^* die Menge der invertierbaren Elemente in M. Zeigen Sie, daß $(M^*, \circ, 1, \iota)$ eine Gruppe ist.
3. Sei $(M, \circ, 1, \iota)$ eine Gruppe, $a, b \in M$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\iota(a \circ b) = \iota(b) \circ \iota(a)$$