Fernau / Gulan
Universität Trier

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Strukturen und Logik

Aufgabenblatt 11

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik" vor Raum H426

Aufgabe 49 (Morphismen) (3+3 Punkte)

1. Sei $V_i = \{s_i, t_i\}$. Zeigen Sie, dass es zwischen den Graphen $G_1 = (V_1, \{(s_1, s_1), (s_1, t_1)\})$ und $G_2 = (V_2, \{(s_2, t_2), (t_2, t_2)\})$ keinen Morphismus gibt.
2. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Homomorphismen wieder ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 50 (Algebraische Strukturen) (3+4+2+3 Punkte)

1. Der Junktor $\bowtie$ ist durch folgende Wahrheitstafel definiert

a	b	$a \bowtie b$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

   (a) Zeigen Sie, dass $X = (\{\text{w,f}\}, \bowtie)$ ein Monoid ist.

   (b) Geben Sie weitere algebraische Eigenschaften von X an. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

2. Sei $\mathcal{G} = (G, \circ, \iota, 0)$ eine Gruppe, $a, b, c \in G$. Zeigen Sie, dass aus $a \circ b = a \circ c$ folgt, dass $b = c$ gilt.
3. Sei $\mathcal{G} = (G, \circ, \iota, a)$ eine Gruppe mit $G = \{a, b, c, d\}$. Es ist bekannt, dass $b^2 = c^2 = a$ gilt. Geben Sie die Verknüpfungstafel an.

Aufgabe 51 (Teileralgebren) (2+4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}(12)$ keine Boolesche Algebra ist.
2. Geben Sie $\mathcal{T}(42)$ mit Verknüpfungstafeln für ggT und kgV an.

Aufgabe 52 (Boolesche Strukturen) (3+6+2 Punkte)

Eine *Boolesche Struktur* ist beschrieben durch ein 5-Tupel $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, 0, 1)$ mit:
B: Grundmenge
$\oplus, \otimes : B \times B \to B$: zweistellige Verknüpfungen auf B
$\oplus$: *Addition*; $\otimes$: *Multiplikation*
Wir fordern folgende Rechengesetze:
$0 \neq 1$
Kommutativgesetze: (1) $\forall a, b \in B : a \oplus b = b \oplus a$, (2) $\forall a, b \in B : a \otimes b = b \otimes a$.
Distributivgesetze: (1) $\forall a, b, c \in B : a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ und (2) $\forall a, b, c \in B : a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$
Neutralitätsgesetze: (1) 0 ist *rechtsneutrales Element* bzgl. $\oplus$, d.h.: $a \oplus 0 = a$ und (2) 1 ist *rechtsneutrales Element* bzgl. $\otimes$, d.h.: $a \otimes 1 = a$
$0, 1 \in B$: Konstanten (nullstellige Operationen)

1. Offenbar lässt sich jede Boolesche Algebra als eine Boolesche Struktur auffassen. Geben Sie ein Beispiel an für eine Boolesche Struktur, welche nicht als Boolesche Algebra auffassbar ist (mit Begründung).
2. Auf jeder der Folien 5-10 von VL22 wurden weitere Eigenschaften / Rechengesetze Boolescher Algebren hergeleitet. Welche dieser Eigenschaften gelten auch für Boolesche Strukturen aufgrund der in VL22 angeführten Beweise ?
3. Erörtern Sie für eine der "Eigenschaften ohne Beweis" aus Punkt 2, ob diese evtl. doch in Ihrem konkreten Beispiel aus Punkt 1 gilt !