

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Strukturen und Logik
Aufgabenblatt 12

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Aufgabe 53 (noch ein Operator)

(6 Punkte)

Die Operation \otimes auf der Booleschen Algebra $(B, \oplus, \otimes, 0, 1, \kappa)$ ist wie folgt definiert:

$$a \otimes b = (a \otimes \kappa(b)) \oplus (\kappa(a) \otimes b)$$

Zeigen Sie, dass für $x \in B$ gilt:

- $x \otimes x = 0$
- $0 \otimes x = x$
- $1 \otimes x = \kappa(x)$

Aufgabe 54 (Teileralgebra)

(3+2+3+3 Punkte)

Betrachten Sie im folgenden die Teileralgebra \mathcal{T}_{105}

1. Geben Sie das Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation auf $T(105)$ an.
2. Welches sind die Atome der Algebra, welches die Hyperatome?
3. Stellen Sie jedes Element der Algebra als „Summe“ von Atomen dar.
4. Stellen Sie jedes Element der Algebra als „Produkt“ von Hyperatomen dar.

Aufgabe 55 (Verbände)

(2+4+2 Punkte)

Sei $\mathbb{N}_t = \{0, 1, 2, \dots, t-1\}$. Betrachten Sie die Menge der Funktionen in \mathbb{N}_t : $C_t = \mathbb{N}_t^{\mathbb{N}_t}$. Für zwei Funktionen $f, g \in C_t$ seien die Relationen \prec, \succ wie folgt definiert.

- $f \prec g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}_t : f(x) \leq g(x)$

- $f \succ g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}_t : f(x) \geq g(x)$

1. Zeigen Sie für eine der beiden Relationen, dass sie nichtlineare Halbordnung auf C_t ist.
2. Geben Sie zwei Funktionen \sqcap und \sqcup an, so dass $\mathcal{V} = (C_t, \sqcap, \sqcup)$ distributiver Verband ist und je eine der Operationen \sqcap, \sqcup eine der Relationen \prec, \succ induziert.
3. Geben Sie das kleinste und das grösste Element unter \prec in \mathcal{V} an.

Aufgabe 56 (Distributivität)

(3+3 Punkte)

Sei $\mathcal{V} = (V, \sqcup, \sqcap)$ ein distributiver Verband, $a, b, c \in V$. Zeigen Sie, dass gilt:

1. $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \Leftrightarrow a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$

2. $(a \sqcup b) \sqcap (b \sqcup c) \sqcap (c \sqcup a) = (a \sqcap b) \sqcup (b \sqcap c) \sqcup (c \sqcap a)$