

Übungen zur Vorlesung  
**Diskrete Strukturen und Logik**  
Aufgabenblatt 2

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde  
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

**Aufgabe 6 (Verknüpfung von Junktoren)** (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie bereits erfahren, daß die Formeln  $a \rightarrow b$  und  $\neg a \vee b$  logisch äquivalent sind. Zeigen Sie durch die Angabe von Wahrheitstafeln, wie sich einzelne Junktoren durch Mengen anderer Junktoren darstellen lassen.

1.  $\wedge$  durch  $\{\rightarrow, \neg\}$
2.  $\leftrightarrow$  durch  $\{\neg, \vee\}$

**Aufgabe 7 (Pierce'scher Pfeil)** (6 Punkte)

Ein weiterer Junktor ist der *Pierce'sche Pfeil*  $\downarrow$ . Er ist durch folgende Wahrheitstafel definiert:

a	b	$a \downarrow b$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	f

Stellen Sie Negation  $\neg$  und Konjunktion  $\wedge$  durch Verwendung von  $\downarrow$  dar. Folgern Sie, daß sich somit auch Disjunktion  $\vee$  und Implikation  $\rightarrow$  durch  $\downarrow$  darstellen lassen.

**Aufgabe 8 (ein Klassiker)** (3 Punkte)

Geben Sie jeweils an, ob der Kreter die Wahrheit sagt, oder nicht.

1. Der Kreter sagt: „Ich lüge“
2. Der Kreter sagt: „Alle Kreter sind Lügner“

**Aufgabe 9 (Prädikatenlogische Definitionen)**

(2+2+3 Punkte)

Im folgenden seien alle Variablen natürliche Zahlen. Welche (herkömmlich bekannten) Eigenschaften werden durch die Prädikate  $P_i$  beschrieben, wenn die folgenden Formeln Tautologien sind:

1.  $P_1(x) \leftrightarrow \neg \forall y (2y \neq x)$
2.  $P_2(x) \leftrightarrow \exists y (y = \frac{x}{y})$
3.  $P_3(x) \leftrightarrow \neg \exists t \exists s ((s \cdot t = x) \wedge (s + t \leq x))$

**Aufgabe 10 (Titiwus Fauna)**

(6 Punkte)

Auf der Insel Titiwu leben Crarks, Anks, Dulfе, Bommels und Erps. Betrachten wir die Verhältnisse zwischen den knuffigen Gesellen genauer:

Man weiß, daß Crarks, Anks und Dulfе Formen von Bommels sind. Weiterhin ist bekannt, daß Anks sowohl Dulfе als auch Bommels sind. Zudem sind einige Dulfе weder Anks noch Crarks und auch keine Erps. Völlig klar ist dagegen, daß es Anks gibt, die weder Erps noch Crarks sind.

Immerhin sind manche Erps und manche Crarks Dulfе, manche Anks auch. Außerdem verhält es sich so, daß es Erps gibt, die Anks sind, manche, die Dulfе sind und erstaunlicherweise auch solche, die sowohl Crarks als auch Anks sind.

- Finden sich unter den Erps, die keine Bommels sind, auch Dulfе?
- Ist ein Crark, der ein Ank ist, notwendigerweise ein Dulf? Könnte es sich dabei auch um einen Erp handeln?
- Ist es möglich, daß eine Kreatur existiert, die gleichzeitig Crark, Ank, Dulf, Bommel *und* Erp ist?

Stellen Sie zunächst eine Tabelle auf, in der Sie alle im Text gemachten Aussagen prädikatenlogisch notieren und nummerieren Sie diese. Verwenden Sie dabei die Prädikate  $A(x)$  für „ $x$  ist Ank“,  $B(x)$  für „ $x$  ist Bommel“, usw. entsprechend der Anfangsbuchstaben. Geben Sie bei der Beantwortung der Fragen an, welche Aussagen wie kombiniert werden müssen, um zur Lösung zu gelangen.