

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Strukturen und Logik
Aufgabenblatt 3

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Aufgabe 11 (Kontraposition) (2+3 Punkte)

Ist $p \equiv q \rightarrow r$, so nennt man die Aussage $\neg r \rightarrow \neg q$ auch 'Kontraposition von p '.

1. Geben Sie die Kontraposition von $\forall x P(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ (in obigem Sinne) an und formen Sie diese so um, daß lediglich die Prädikatvariablen negiert werden (d.h. ziehen Sie den Junktor ' \neg ' soweit wie möglich nach innen)
2. Zeigen Sie durch Kontraposition: „Ist x nicht durch n teilbar, so auch nicht durch ein Vielfaches von n “. Formalisieren Sie die Aussage dazu zuerst geeignet und verwenden Sie die dabei eingeführten Prädikate im Beweis.

Aufgabe 12 (Restklassenarithmetik) (4+5 Punkte)

Der *Modulo*-Operator (mod) gibt an, wie groß der Rest bei ganzzahliger Division ist. Ist etwa $a \text{ mod } b = c$, so gilt $\exists n : a = b \cdot n + c$ und $c < b$. c heißt auch *Restklasse* von a modulo b . Eine Zahl a ist durch b teilbar gdw. $a \text{ mod } b = 0$.

1. Zeigen Sie, dass mit $a \text{ mod } b = c$ und $a' \text{ mod } b = c'$ auch gilt:
 - $(a + a') \text{ mod } b = (c + c') \text{ mod } b$
 - $(a \cdot a') \text{ mod } b = (c \cdot c') \text{ mod } b$
2. Eine alte Rechenregel besagt, dass eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme¹ durch 3 teilbar ist. Beweisen Sie dies unter Verwendung der Ergebnisse aus Teilaufgabe 1.

¹die Quersumme q ist die Summe der Ziffern einer Zahl n . Eine Zahl im Dezimalsystem steht für eine Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen. Die Quersumme von $n = \sum_i n_i 10^i$ ist $q = \sum_i n_i$.

Aufgabe 13 (Schubfachschlüsse)

(2+3+4 Punkte)

1. Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; zeigen sie, daß unter 4 beliebigen Elementen aus M immer 2 sind, die sich zu 7 addieren.
2. Sei $N = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; wieviele beliebige Elemente müssen mindestens aus N gewählt werden, so daß sich 2 dieser Elemente zu 22 summieren?
3. Ein Indianerstamm bestehe aus $n \geq 2$ Indianern. Zeigen Sie, dass wenigstens 2 der Indianer innerhalb dieser Gruppe die gleiche Anzahl an Blutsbrüdern haben.

Aufgabe 14 (Spiel)

(4 Punkte)

Ein einfaches Spiel für 2 Spieler A und B ist wie folgt beschrieben: A beginnt. Von einem Häufchen Streichhölzer nehmen A und B abwechselnd je 1 oder 2 Streichhölzer weg. Wer das letzte Streichholz wegnimmt, verliert.

Unter welchen Bedingungen hat A eine Gewinnstrategie?