Fernau / Gulan
Universität Trier

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Strukturen und Logik

Aufgabenblatt 4

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Aufgabe 15 (Induktion) (2+4+3+4 Punkte)

1. Definieren Sie induktiv die Menge der Zahlen n, für die gilt: $n \bmod 3 = 2$.
2. Eine *Ballansammlung* ist wie folgt definiert:
   - Ein blauer Ball bildet eine Ballansammlung.
   - Zwei rote Bälle bilden eine Ballansammlung.
   - Ist D eine Ballansammlung aus roten und blauen Bällen, so erhält man eine Ballansammlung D', indem man die Anzahl der roten und blauen Bälle in D vertauscht.
   - Ist D eine Ballansammlung aus roten und blauen Bällen, so erhält man eine Ballansammlung D', indem man für jeden roten Ball zwei blaue Bälle dazugibt.
   - Nichts anderes ist eine Ballansammlung.

   Notieren Sie eine Ballansammlung aus n roten und m blauen Bällen als $r^n b^m$. Geben Sie eine formale Definition für die Menge $\mathcal{B}$ aller Ballansammlungen an.
3. Beweisen Sie, dass für $a \neq 0$, $a \neq 1$ gilt:
$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$
4. Beweisen Sie, dass $n^2 > 3n$ für $n \geq 4$.

Aufgabe 16 (Mengenalgebra) (2+1+4 Punkte)

1. Sei $A, B, C \subseteq S$. Zeigen Sie, dass gilt: $[C \cap (B \cup A)] \cup [(A \cup B) \cap S \setminus C] = A \cup B$
2. Die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ zweier Mengen A und B ist definiert als $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Zeigen Sie dass gilt:
   - $\triangle$ ist kommutativ
   - $\triangle$ ist assoziativ

Aufgabe 17 (Potenzmengen) (4+4 Punkte)

1. Für eine endliche Menge M bezeichne $|M|$ die Anzahl der Elemente in M. Zeigen Sie (induktiv), daß gilt $|2^M| = 2^{|M|}$.
2. Sei $M = \{2, \text{blau}, \pi, \diamondsuit\}$. Geben Sie das Hasse-Diagramm von 2^M an.