

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Strukturen und Logik
Aufgabenblatt 5

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungsstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Hinweis: Relationen werden hier auch wie mehrstellige Prädikate notiert. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $R(x, y)$, statt $(x, y) \notin R$ auch $\neg R(x, y)$.

Aufgabe 18 (Abschlüsse von Relationen)

(3+3+2+3 Punkte)

1. Gegeben die Relation $R = \{(a, a), (b, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (c, d)\}$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie die reflexive, die transitive und die symmetrische Hülle jeweils separat an.
2. Geben Sie zudem die kleinste Relation R' an, so dass $R \subseteq R'$ und R' transitiv und symmetrisch ist.
3. Was würde sich an den Antworten von Teilaufgabe 1 ändern, wenn R auf $M' = \{a, b, c, d, e\}$ definiert wäre?
4. Macht es Sinn, den antisymmetrischen Abschluss einer Relation zu definieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 19 (Eigenschaften von Relationen)

(3+3+3 Punkte)

Geben Sie für die Relation $D_i \subseteq S_i \times S_i$ jeweils an, ob Sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv ist. Beweisen sie Ihre Aussagen.

1. $S_1 = \mathbb{Q}; (x, y) \in D_1 \leftrightarrow |x| \leq |y|$
2. $S_2 = \mathbb{N}; (x, a) \in D_2 \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : |x| \cdot |y| = 2k$
3. $S_3 = \mathbb{Z}; (x, y) \in D_3 \leftrightarrow x$ ist ungerade

Aufgabe 20 (Relationen im Alltag)

(2+4+4 Punkte)

Verwandschaftsbeziehungen lassen sich hervorragend relational ausdrücken. Wir betrachten Relationen auf der Menge aller Menschen:

$$\begin{aligned} S(x, y) &\Leftrightarrow x \text{ ist Sohn von } y \\ V(x, y) &\Leftrightarrow x \text{ ist Vater von } y \\ M(x, y) &\Leftrightarrow x \text{ ist Mutter von } y \end{aligned}$$

1. Wie lässt sich das Prädikat $W(x)$, für „ x ist weiblichen Geschlechts“, mithilfe der angegebenen Relationen ausdrücken?
2. Definieren Sie unter alleiniger Verwendung der vorgegebenen Relationen die Relationen
 - (a) $Sc(x, y)$ für „ x ist Schwester von y “.
 - (b) $O(x, y)$ für „ x ist Onkel von y “.
3. Geben Sie eine rekursive Definition der Relation $N(x, y)$, für „ x ist Nachfahre von y “, an.

Aufgabe 21 (Potenzen von Relationen)

(5 Punkte)

Es sei R eine Relation über der Menge M . Zeigen Sie durch Induktion:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} (R^{n+m} = R^n \circ R^m)$$

Geben Sie genau an, welche (bekanntesten) Rechengesetze Sie dabei benutzt haben.