Fernau / Gulan
Universität Trier Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Strukturen und Logik

Aufgabenblatt 6

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungssstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Hinweis: Behandeln die Graphen in den Aufgaben 22 und 23 als **ungerichtet**, den in Aufgabe 25 als gerichtet.

Aufgabe 22 (Knotengrad) (4 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| > 1$. Zeigen Sie, dass es wenigstens 2 Knoten desselben Grades gibt.

Aufgabe 23 (Graphen) (3+3 Punkte)

1. Sei $T = (V, E)$ ein Baum. Ein Knoten $v \in V$ heisst *Blatt*, wenn er zu maximal einer Kante inzident ist. Sei $B \subseteq V$ die Menge aller Blätter in T. Zeigen Sie, dass gilt: $|B| = |V \setminus B| + 1$
2. Beweisen Sie, dass in jedem kreisfreien Graphen $G = (V, E)$ gilt: $|V| = |E| + 1$

Aufgabe 24 (Äquivalenzrelationen) (5+2+4+2 Punkte)

Im folgenden gelte stets $R \subseteq M \times M$

1. In der Vorlesung wurde die durch R induzierte Äquivalenzrelation als reflexive Hülle der transitiven Hülle der symmetrischen Hülle eingeführt. Untersuchen, Sie, inwieweit die Reihenfolge der Hüllenbildungen relevant ist.
   (a) Beweisen oder widerlegen Sie: $(R^+)^- = (R^-)^+$
   (b) Zeigen Sie: $R^+ \cup \Delta_M = (R \cup \Delta_M)^+$
2. Zeigen Sie, dass gilt: Ist R linkstotal, symmetrisch und transitiv, so ist R eine Äquivalenzrelation.

3. Ist in Teilaufgabe 2 die Linkstotalität von R notwendig? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 25 (Warshall-Algorithmus) (2+8 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und Kantenmenge $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 1)\}$

- Zeichnen Sie G.
- Bestimmen Sie E^* mit Hilfe des Warshall-Algorithmus'. Benutzen Sie dafür die in der Vorlesung vorgestellte 'schnellere Variante' (Folien zu Vorlesung 10, S.23). Der Algorithmus besteht aus 3 ineinander geschachtelten Schleifen, in denen sukzessive neue Kanten zur Kantenmenge hinzugefügt werden. Geben Sie nach jedem vollen Durchlauf der äußersten Schleife die erweiterte Kantenmenge an und zeichnen Sie den jeweils zugehörigen Graphen.

Aufgabe 26 (Äquivalenzrelation und Partition) (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass jede Äquivalenzrelation A eine Partion P induziert und umgekehrt.

Kleine Anleitung: Sie müssen einerseits zeigen, dass die Klassen von A die Eigenschaften einer Partition haben. Andererseits müssen Sie zeigen, dass die Elemente von P Äquivalenzklassen sind, d.h. (informal) dass die Relation *„a und b sind Elemente derselben Klasse von P“* die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt.