

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (Ersetzungssysteme)

1. Zeigen Sie, dass für ein Ersetzungssystem ES und ein Axiom a gilt

$$a' \in L_g(ES, \{a\}) \Rightarrow L_g(ES, \{a'\}) \subseteq L_g(ES, \{a\})$$

2. Formulieren und beweisen Sie die analoge Aussage für $a' \in L_a(ES, \{a\})$

3. Gegeben sei $ES = (\{a, b, c\}, \{a \rightarrow b, ab \rightarrow abab, ab \rightarrow c\})$

(a) Zeigen Sie, dass gilt $\{c^n | n \geq 2\} \subset L_g(ES, \{aa\})$

(b) Zeigen Sie, dass gilt $\{b^n | n \in \mathbb{N}\} \cap L_g(ES, \{aa\}) = \{b^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$

4. Gegeben das Ersetzungssystem $E = (\{a, b\}, \{ab \rightarrow \lambda\})$ und die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow ab | aSb | SS\})$. Zeigen Sie, dass gilt

$$L_a(E, \{\lambda\}) = L(G)$$

Aufgabe 2 (λ -Freiheit)

1. Gegeben eine kfG $G = (V_N, V_T, S, P)$. Wie lässt sich herausfinden, ob $\lambda \in L(G)$?
2. Gegeben die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ wobei $P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aB | BC, B \rightarrow ASB | \lambda | bS, C \rightarrow c | \lambda\}$. Offenbar gilt $\lambda \in L(G)$. Geben Sie eine Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$ an, so dass λ nur aus dem Startsymbol S' abgeleitet werden kann und S' auf keiner rechten Seite einer Regel vorkommt.

Aufgabe 3 (Abschlusseigenschaften)

Eine Abbildung $\sigma : \Sigma^* \rightarrow 2^{\Gamma^*}$ heisst *Substitution*, wenn gilt $\forall x, y \in \Sigma^* : \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ und $\sigma(\lambda) = \lambda$. Ein einzelnes Zeichen aus Σ wird dabei auf eine Sprache über Γ abgebildet. In Abhängigkeit des Typs der Bildsprache nennt man die Abbildung auch Substitution mit Typ- i - Sprachen.

1. Zeigen Sie für die regulären Sprachen, daß diese abgeschlossen sind unter Substitution mit regulären Sprachen.
2. Zeigen Sie das analoge Ergebnis für Substitution von kontextfreien mit kontextfreien Sprachen.
3. Folgern Sie aus den vorangegangenen Teilaufgaben die Abgeschlossenheit von Typ-2 und Typ-3 - Sprachen unter Homomorphismen.
4. In der Chomsky-Hierarchie ist jede Typ- i Sprache auch eine Typ- $(i-j)$ Sprache (für $1 \leq j \leq i$). Würde es demnach für die vorhergehenden Aufgaben genügen, das Resultat für Typ-2 - Sprachen (kontextfrei) zu zeigen und daraus auf die Gültigkeit der Aussage für Typ-3 - Sprachen (die ja ebenfalls Typ-2 - Sprachen sind) zu schliessen?