8. Übungsblatt	Grundlagen der Theoretischen Informatik III	SoSe 2010
	Abgabe: bis 16.6.2010, 14:00 im Zettelkasten vor Raum H426	

1. Aufgabe: *(4 Punkte)*

1. Zeigen Sie, dass ein Matroid (M, U) bereits durch M und die maximalen Mengen von U bestimmt ist.
2. Wieviele maximale Mengen kann ein Matroid auf der Menge M höchstens haben?

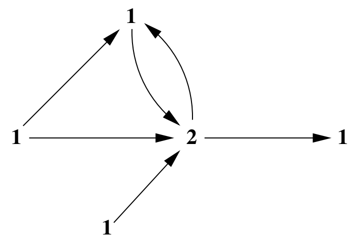
2. Aufgabe: *(10 Punkte)*

1. Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph ohne Schleifen oder Mehrfachkanten, d.h. $A \subseteq V^2 \setminus \Delta_V$. Die Anzahl der Kanten aus $I \subseteq A$, die in einen Knoten v eingehen, ist $\mathrm{d}_I^-(v) = |\{u \mid (u, v) \in I\}|$. Gegeben sei zudem eine positive Gewichtsfunktion auf den Knoten, $w : V \to \mathbb{N}^+$.

   Zu G sei ein (Kanten-) Teilmengensystem $T_G = (A, U)$ gegeben mit

   $$U = \{I \subseteq A \mid \forall v \in V : \mathrm{d}_I^-(v) \leq w(v)\}$$

   a) Bestimmen Sie T_H, wobei H der nachstehende Graph ist; die Zahl in jedem Knoten steht für $w(v)$. Gemäß der 1. Aufgabe genügt es, die maximalen Mengen anzugeben.

   b) Zeigen Sie, dass T_G ein Matroid ist.

2. Wir betrachten die ungerichtete Variante: Sei $G = (V, E)$ ein *un*gerichteter Graph ohne Schleifen oder Mehrfachkanten, d.h. $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \neq v\} \subseteq 2^V$. Der Grad von v bzgl. I ist entsprechend $\mathrm{d}_I(v) = |\{u \mid \{u, v\} \in I\}|$. Wieder sei $w : V \to \mathbb{N}^+$ eine Gewichtsfunktion.

   Zeigen Sie, dass (E, U) mit $U = \{I \subseteq E \mid \forall v \in V : \mathrm{d}_I(v) \leq w(v)\}$ im Allgemeinen *kein* Matroid ist.

3. Aufgabe: (*6 Punkte*)

Geben Sie einen Greedy-Algorithmus an, der nachweislich (mit Resultaten aus der Vorlesung) gestattet, in einem ungerichteten zusammenhängenden Graphen mit Kantengewichten einen Spannbaum (aufgefasst als Kantenmenge) mit kleinstem Gewicht zu finden. Was müssten Sie zeigen, um die Korrektheit Ihres Algorithmus nachzuweisen? Welche Laufzeit hat Ihr Algorithmus, möglichst scharf als $O(f(n))$ abgeschätzt, wobei n die Knotenanzahl des eingegebenen Graphen sei, und warum?