Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

Aufgabenblatt 4

In der Übung Mittwoch 23.5.07 um 8.15 Uhr im H11
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1
Satz von Savitch
Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ konstruierbar und $\log \in O(f)$. Dann $NSPACE(f) \subseteq SPACE(f^2)$

Der Beweis geht wie folgt: Jede 1-Band-NTM M kann als gerichteten Konfigurationsgraph $G_M(x)$ für jede Eingabe x aufgefasst werden. Hierbei ist die Knotenmenge $V_M(x)$ eine Menge von Konfigurationen von M (Beschreibung von Zustand und Bandinhalt): (q, y, z, p), q ist Zustand, y Bandinhalt links und unter Lese/Schreibkopf, z Bandinhalt rechts vom Lese/Schreibkopf und p Position des Lesekopfs in der Eingabe. Es gilt für die Kanten: $(a, b) \in A_M(x) \iff a$ kann mittels δ in b überführt werden. $Init_M(x)$ ist die Menge der Anfangskonfigurationen.
Ist $L \in NSPACE(f)$ und M eine NTM die L erkennt, dann besteht nun unsere Aufgabe darin, in $G_M(x)$ einen Weg von $Init_M(x)$ zu einer akzeptierenden Konfiguration zu suchen und zwar mit nicht mehr als $O(f^2)$ Platz. Dies bewerkstelligt folgender Algorithmus:

$acc \leftarrow$ **false**
for all $K \in V_M(x)$ **do**
  if K akzeptiert $\wedge$ $reach(Init_M(x), K, c'f(n))$ **then**
    $acc \leftarrow$ **true**
  end if
end for
return acc

function $reach(K_1, K_2, j)$:
if $j == 0$ **then**
  return $((K_1 == K_2) \vee (K_1 \xrightarrow{1} K_2))$
else
  $found \leftarrow$ **false**
  for all $K \in V_M(x)$ **do**
    if $reach(K_1, K, j-1) \wedge (K, K_2, j-1)$ **then**
      $found \leftarrow$ **true**
    end if
  end for
end if
return $found$

Hierbei liefert $reach(K_1, K_2, j)$ **true** zurück, falls $K_1 \overset{\leq 2^j}{\to} K_2$ gilt, sonst **false**. Die Konstante c' ist diejenige, so dass $T_M(x) \leq c' f(|x|)$ für alle Eingaben x.

Bestimme nun wieviel Platz und Zeit dieser Algorithmus asymptotisch braucht.

Aufgabe 2 (Logspace- und Polynomialzeitreduktionen)
Zeigen Sie:

1. $A \leq_P B \iff \bar{A} \leq_P \bar{B}$ für alle Sprachen A und B.
2. $A \leq_P B$ für $A \in P$ und beliebiges B mit $B \neq \emptyset$ und $B \neq \Sigma^*$.
3. $\{1\}$ ist vollständig für $DSPACE(\log n)$ unter $\leq_L$.

Aufgabe 3 (Reduktionen)
Betrachte folgende zwei Sprachen über binär kodierten Zahlen:

$$\text{RUCKSACK} := \{y_1 \star y_2 \star \ldots \star y_n \star y \mid n \in \mathbb{N}, y_i, y \in \{0,1\}^*, \exists S \subseteq \{1,2,\ldots,n\} : \sum_{i \in S} y_i = y\}$$

$$\text{PARTITION} := \{y_1 \star y_2 \star \ldots \star y_n \mid n \in \mathbb{N}, y_i \in \{0,1\}^*, \exists S \subseteq \{1,2,\ldots,n\} : \sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \notin S} y_i\}$$

Zeigen Sie RUCKSACK $\leq_L$ PARTITION und PARTITION $\leq_L$ RUCKSACK.