Fernau/Raible
Wintersemester 2007/08
Universität Trier

Übungen zur Vorlesung

Parametrisierte Algorithmen

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1
Zeige, daß NONBLOCKER einen $2k$-Kern besitzt.

Aufgabe 2
MAXIMUM ACYCLIC SUBGRAPH ist folgendes Problem:
Gegeben ist ein gerichteter Graph $G(V, A)$, $V = \{v_1, \dots v_n\}$. Gesucht ist eine möglichstgroße Menge $A' \subseteq A$ die azyklisch ist (also keinen gerichteten Kreis enthält).
Wir betrachten folgenden Algorithmus:

Sol=$\emptyset$.
Ordne $v_1, \dots, v_n$ in dieser Reihenfolge in einer Linie an.
$A_{\ell r} = \{(v_i, v_j) \mid i < j\}$ (Kanten die von links nach rechts zeigen).
$A_{r\ell} = \{(v_j, v_i) \mid j > i\}$ (Kanten die von rechts nach links zeigen.
if $|A_{\ell r}| \geq |A_{r\ell}|$ **then**
    Sol $= A_{\ell r}$.
else
    Sol $= A_{r\ell}$.
end if

1. Begründe warum Sol azyklisch ist.
2. Sei $A_{opt} \subseteq A$ eine optimale Lösung. Zeige $\frac{|A_{opt}|}{|Sol|} \leq 2$.
3. Die parametrisierte Variante von MAXIMUM ACYCLIC SUBGRAPH ist:
   Gibt es ein azyklische Menge $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geq k$?.
   Benutze den Algorithmus um einen linearen Kern für MAXIMUM ACYCLIC SUBGRAPH herzuleiten. Betrachten Sie die beiden Fälle $|Sol| \geq k$ und $|Sol| < k$.
4. Ist MAXIMUM ACYCLIC SUBGRAPH immer noch **NP**-hart, falls der gegebene Graph ungerichtet ist?

Aufgabe 3
MAXSAT ist folgendes Problem: Gegeben ist ein logische Formel in konjunktiver

Normalform über Variablen $x_1, \ldots, x_n$ z.B. $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_3)$. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen. Die Klauseln aus unserem Beispiel sind $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4), (\bar{x}_4 \vee x_3)$.
Finde nun eine Belegung von $x_1, \ldots, x_n$, so daß mindestens k Klauseln wahr werden. Zeigen Sie, daß MaxSat einen Kern besitzt der $O(k^2)$ Literale enthält. Gehen Sie hierbei so vor:

1. Sei K die Anzahl der Klauseln. Zeigen Sie, daß wir immer eine Variablenbelegung finden, so daß mindestens $\frac{K}{2}$ viele Klauseln wahr werden. Tipps: a) Verwenden Sie den Zufall. b) Jede Variablenbelegung hat ein Inverses.
2. Zeigen Sie, daß wir davon ausgehen können, daß $K < 2k$.
3. Seien F_s alle Klauseln die weniger als k Literale und F_ℓ alle Klauseln die mindestens k Literale besitzen. Sei L die Anzahl der Klauseln in F_ℓ. Zeigen Sie, daß wenn $L \geq k$ gilt, wir die gesuchte Belegung finden.
4. Zeigen Sie, daß wenn wir in Punkten 2 und 3 keine Lösung fanden, dann ist $(F_s, k - L)$ der gesuchte Kern.

Aufgabe 4 (optional)
Finden Sie für 3-Hitting-Set Reduktionsregeln die der Buss-Regel für Vertex Cover ähneln. Konkret: **a)** Seien $a, b \in V$. Wann können Sie entscheiden, daß a, b in eine optimale 3-Hitting-Set-Lösung muß. Ziehen Sie in Betracht in wievielen Mengen a, b enthalten sind.
b) Sei $z \in V$. Wann können Sie entscheiden, daß z in eine optimale 3-Hitting-Set-Lösung muß. Ziehen Sie in Betracht in wievielen Mengen z enthalten ist und daß bereits die vorherige Regel erschöpfende angewendet wurde.
Leiten Sie daraus einen Kern von $O(k^3)$ für 3-Hitting-Set her.