

Übungen zur Vorlesung  
Parametrisierte Algorithmen  
Aufgabenblatt 5

In der Übung Mittwoch 19.12.07 um 8.30 Uhr im H406  
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

**Aufgabe 1 (Cluster Probleme)**

1. Zeigen Sie:

$G$  ist Clustergraph  $\iff G$  enthält keinen induzierten Teilgraph  $P_2$ .

Ein  $P_2$  ist ein Pfad mit zwei Kanten.

2. Das CLUSTER-VERTEX-DELETION-Problem taucht bei der Auswertung von DNA-Microarray-Daten auf. Es ist wie folgt definiert:

CLUSTER VERTEX DELETION

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Knotenmenge  $C \subseteq V$  der Größe  $\leq k$ , so dass  $G$  nach dem Löschen aller Knoten in  $C$  ein Cluster-Graph ist?

Zeige, dass CLUSTER VERTEX DELETION in  $O(3^k)$  lösbar ist.

3. CLUSTER DELETION

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Kantenmenge  $C \subseteq E$  der Größe  $\leq k$ , so dass  $G$  nach dem Löschen aller Kanten in  $C$  ein Cluster-Graph ist?

Finden Sie einen Suchbaum der Größe  $O(c^k)$  für CLUSTER DELETION mit  $c < 2$ .

Tipp: Rekursionen der Art  $F(n) = F(n - a_1) + \dots + F(n - a_\ell)$  schätzen Sie folgendermaßen ab: Berechnen Sie die größte reelle Nullstelle  $c$  des Polynoms  $1 - x^{-a_1} - \dots - x^{-a_\ell}$ . Es gilt dann  $F(n) \in O(c^n)$ .

### Aufgabe 2 (Biclique Editing)

Eine *Biclique* ist ein bipartiter Graph mit maximaler Kantenanzahl. Zeigen Sie, dass folgendes Problem in  $\mathcal{FPT}$  ist:

BICLIQUE EDITING

**Eingabe:** Ein ungerichteter bipartiter Graph  $G = (V, E)$  sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Kann man durch Löschen bzw. Hinzufügen von maximal  $k$  Kanten aus  $G$  einen Graphen kreieren, dessen Zusammenhangskomponenten Bicliquen sind?

Tipp: Beweisen Sie eine Charakterisierung durch verbotene Teilgraphen ähnlich wie im ersten Teil von **Aufgabe 1**.

### Aufgabe 3 (Exakte exponentialzeit Algorithmen)

Zeigen Sie, dass HITTING SET in Zeit  $O(c^n)$  mit  $c < 2$  lösbar ist. Die Variable  $n$  gibt die Größe des Elementuniversums an.

Tipp: Überlegen Sie, wie man es algorithmisch ausnutzen kann, wenn man von einem Element in einer Menge weiss, dass es nicht in der Lösung ist. Sprich: Bei einer Menge  $C = \{x_1, x_2, x_3\}$  kann ich in einem Suchbaumzweig annehmen, dass  $x_1$  Lösungselement ist. Damit ist diese Möglichkeit auch für alle anderen Verzweigungen abgedeckt.

### Aufgabe 4 (Erzeugende Funktionen & Rekursionen)

Geben Sie eine geschlossene Form für die folgende Rekursion an:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

und  $a_0 = 1, a_1 = 3$ .