Fernau/Raible
Wintersemester 2007/08
Universität Trier

Übungen zur Vorlesung

Parametrisierte Algorithmen

Aufgabenblatt 6

In der Übung Mittwoch 16.01.08 um 8.30 Uhr im H406
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1 (Exakte exponentialzeit Algorithmen)

Zeigen Sie, daß Hitting Set in Zeit $O(c^n)$ mit $c < 2$ lösbar ist. Die Variable n gibt die Größe des Elementuniversums an.

Tipp: Überlegen Sie, wie man es algorithmisch ausnutzen kann, wenn man von einem Element in einer Menge weiß, daß es nicht in der Lösung ist. Sprich: Bei einer Menge $C = \{x_1, x_2, x_3\}$ kann ich in einem Suchbaumzweig annehmen, daß x_1 Lösungselement ist. Damit ist diese Möglichkeit auch für alle anderen Verzweigungen abgedeckt.

Aufgabe 2 (Dynamisches Programmieren)

Ein P_2 ist ein Pfad der aus 2 Kanten und 3 Knoten besteht. Wir betrachten folgendes Problem:
P_2-Packing
Gegeben: Ein Graph $G(V, E)$, und der Parameter k.
Wir fragen: Gibt es eine Menge von k knotendisjunkten P_2's ?
Zeigen Sie, daß dieses Problem in Zeit $O(2^n)$ gelöst werden kann.
Tipp: Betrachten Sie alle Knotenteilmengen und überlegen Sie sich welche Teillösungen Sie jeweils speichern müssen.

Aufgabe 3 (Baumweite)

Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph.

1. Eine *Baumzerlegung* von G ist ein Paar $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T = (V_T, E_T)\rangle$ mit $\forall i \in V_T : X_i \subseteq V_G$, wobei T ein Baum ist und die folgenden Bedingungen gelten:
   (a) $\bigcup_{i \in V_T} X_i = V_G$,
   (b) $\forall (u, v) \in E_G \; \exists\, i \in V_T : u \in X_i \wedge v \in X_i$,
   (c) $\forall i, j, k \in V_T$: Falls j in T auf dem Pfad zwischen i und k liegt, so gilt $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Die *Weite* einer Baumzerlegung $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T \rangle$ ist definiert als $\max_{i \in V_T}\{|X_i|\} - 1$.

2. Die *Baumweite* $tw(G)$ von G ist der minimale Wert k, so dass G eine Baumzerlegung der Weite k besitzt.

Betrachten Sie nun folgende Aufgaben:

1. Zeigen Sie, daß jeder induzierte Kreis Baumweite 2, aber nicht Baumweite 1 besitzt.
2. Welche Baumweiten besitzen folgende Graphen:

(a) (b)

3. Zeigen Sie:

   G hat ein Vertex Cover der Größe $r \Rightarrow G$ hat eine Baumzerlegung der Größe r.

4. Zeigen Sie:
   G hat ein Feedback Vertex Set der Größe $t \Rightarrow G$ hat eine Baumzerlegung der Größe $t+1$.

Tipp: Für die Teilaufgaben 1. und 2. sollten Sie die Charakterisierung durch das Räuber-und-Gendarm-Spiel aus Vorlesung 9 nutzen!

Aufgabe 4. (Baumzerlegung und dynamisches Programmieren)

Überlegen Sie, wie Sie das NP-vollständige 3-Coloring-Problem mittels Baumzerlegung und dynamischen Programmierens lösen können. Finden Sie einen Algorithmus mit der Laufzeit $O(3^{tw(G)} \cdot tw(G) \cdot |G|)$, wenn $tw(G)$ die Baumweite des gegebenen Graphs $G(V, E)$ ist.

> **Eingabe:** Ein Graph $G(V, E)$.
> **Frage:** Gibt es eine Partitionierung der Knotenmenge V in drei Teilmengen, so daß keine zwei Knoten derselben Teilmenge durch eine Kante verbunden sind?

Tipp: Benutzen Sie eine hübsche Baumzerlegung.