Fernau/Raible
Wintersemester 2007/08
Universität Trier

Theoretische Informatik Trier

Übungen zur Vorlesung

# Parametrisierte Algorithmen

Aufgabenblatt 7

In der Übung Mittwoch 30.01.08 um 8.30 Uhr im H406
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

**Aufgabe 1 (Baumweite)**

Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph.

1. Eine *Baumzerlegung* von $G$ ist ein Paar $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T = (V_T, E_T)\rangle$ mit $\forall i \in V_T : X_i \subseteq V_G$, wobei $T$ ein Baum ist und die folgenden Bedingungen gelten:

   (a) $\bigcup_{i \in V_T} X_i = V_G$,

   (b) $\forall (u, v) \in E_G \; \exists \, i \in V_T : u \in X_i \wedge v \in X_i$,

   (c) $\forall i, j, k \in V_T$ : Falls $j$ in $T$ auf dem Pfad zwischen $i$ und $k$ liegt, so gilt $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

   Die *Weite* einer Baumzerlegung $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T\rangle$ ist definiert als $\max_{i \in V_T}\{|X_i|\} - 1$.

2. Die *Baumweite* $tw(G)$ von $G$ ist der minimale Wert $k$, so daß $G$ eine Baumzerlegung der Weite $k$ besitzt.

Betrachten Sie nun folgende Aufgaben:

1. Zeigen Sie, daß jeder induzierte Kreis Baumweite 2, aber nicht Baumweite 1 besitzt.

2. Welche Baumweiten besitzen folgende Graphen:

(a) (b)

3. Zeigen Sie:

   $G$ hat ein Vertex Cover der Größe $r \Rightarrow G$ hat eine Baumzerlegung der Größe $r$.

4. Zeigen Sie:
   $G$ hat ein Feedback Vertex Set der Größe $t \Rightarrow G$ hat eine Baumzerlegung der Größe $t + 1$.

Tipp: Für die Teilaufgaben 1. und 2. sollten Sie die Charakterisierung durch das Räuber-und-Gendarm-Spiel aus Vorlesung 9 nutzen!

**Aufgabe 2. (Baumzerlegung und dynamisches Programmieren)**
Überlegen Sie, wie Sie das NP-vollständige 3-Coloring-Problem mittels Baumzerlegung und dynamischen Programmierens lösen können. Finden Sie einen Algorithmus mit der Laufzeit $O(3^{tw(G)} \cdot tw(G) \cdot |G|)$, wenn $tw(G)$ die Baumweite des gegebenen Graphs $G(V, E)$ ist.

> **Eingabe:** Ein Graph $G(V, E)$.
> **Frage:** Gibt es eine Partitionierung der Knotenmenge $V$ in drei Teilmengen, so daß keine zwei Knoten derselben Teilmenge durch eine Kante verbunden sind?

Tipp: Benutzen Sie eine hübsche Baumzerlegung.

**Aufgabe 3. (Win/Win)**

1. Nonblocker
   **Gegeben:** $G(V, E)$, und der Parameter $k$.
   **Wir fragen:** Gibt es eine Menge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq k$ so daß für alle $v \in V'$ ein $u \in V \setminus V'$ existiert mit $v \in N(u)$.
   Andere Beschreibung: Eine Nonblocker-Menge ist das Komplement einer dominierenden Menge.
   Zeigen Sie, daß Nonblocker in $O(4^k + poly(n))$ lösbar ist.
   Tipp: Wenden Sie eine Win/Win-Strategie an. Berechnen Sie als erstes eine *inklusions-maximale* unabhängige Menge $I$. Betrachten Sie das Komplement von $I$ (genannt $\bar{I}$). Falls $\bar{I}$ nicht wie gewünscht ist, ziehen Sie eine Teilaufgabe dieses Blattes heran.
   Mitteilung: Minimum Dominating Set kann in $O(4^\ell + poly(n))$ für Graphen mit Baumweite $\ell$ gelöst werden.

2. k-internal spanning Tree
   **Gegeben:** $G(V, E)$, und der Parameter $k$.
   **Wir fragen:** Gibt es einen Spannbaum von $G$ der mindestens $k$ interne (nicht-Blatt) Knoten besitzt?
   Die Knoten eines Spannbaum $S(V_S, E_S)$ kann man in eine Menge aus Blättern $L$ und internen Knoten $A$ aufteilen. Zeigen Sie:

(a) Ein Graph besitzt entweder einen Spannbaum mit zwei Blättern oder einen Spannbaum sodaß $L$ eine unabhängigie Menge in $G$ ist.

(b) Falls $G$ kein Vertex Cover mit maximaler Größe $k$ hat, dann besitzt (k+1)-internal spanning Tree eine Lösung.

(c) Falls $G$ ein Vertex Cover mit maximaler Größe $k$ hat, dann besitzt (2k+1)-internal spanning tree keine Lösung.