

Übungen zur Vorlesung
Parametrisierte Algorithmen
Aufgabenblatt 7

In der Übung Mittwoch 30.01.08 um 8.30 Uhr im H406
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1 (Baumweite)

Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph.

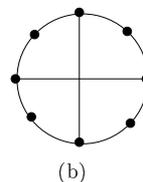
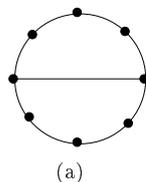
1. Eine *Baumzerlegung* von G ist ein Paar $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T = (V_T, E_T) \rangle$ mit $\forall i \in V_T : X_i \subseteq V_G$, wobei T ein Baum ist und die folgenden Bedingungen gelten:
 - (a) $\bigcup_{i \in V_T} X_i = V_G$,
 - (b) $\forall (u, v) \in E_G \exists i \in V_T : u \in X_i \wedge v \in X_i$,
 - (c) $\forall i, j, k \in V_T$: Falls j in T auf dem Pfad zwischen i und k liegt, so gilt $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Die *Weite* einer Baumzerlegung $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T \rangle$ ist definiert als $\max_{i \in V_T} \{|X_i| - 1$.

2. Die *Baumweite* $tw(G)$ von G ist der minimale Wert k , so daß G eine Baumzerlegung der Weite k besitzt.

Betrachten Sie nun folgende Aufgaben:

1. Zeigen Sie, daß jeder induzierte Kreis Baumweite 2, aber nicht Baumweite 1 besitzt.
2. Welche Baumweiten besitzen folgende Graphen:



3. Zeigen Sie:

G hat ein Vertex Cover der Größe $r \Rightarrow G$ hat eine Baumzerlegung der Größe r .

4. Zeigen Sie:

G hat ein Feedback Vertex Set der Größe $t \Rightarrow G$ hat eine Baumzerlegung der Größe $t + 1$.

Tipp: Für die Teilaufgaben 1. und 2. sollten Sie die Charakterisierung durch das RÄUBER-UND-GENDARM-SPIEL aus Vorlesung 9 nutzen!

Aufgabe 2. (Baumzerlegung und dynamisches Programmieren)

Überlegen Sie, wie Sie das NP-vollständige 3-COLORING-Problem mittels Baumzerlegung und dynamischen Programmierens lösen können. Finden Sie einen Algorithmus mit der Laufzeit $O(3^{tw(G)} \cdot tw(G) \cdot |G|)$, wenn $tw(G)$ die Baumweite des gegebenen Graphs $G(V, E)$ ist.

Eingabe: Ein Graph $G(V, E)$.

Frage: Gibt es eine Partitionierung der Knotenmenge V in drei Teilmengen, so daß keine zwei Knoten derselben Teilmenge durch eine Kante verbunden sind?

Tipp: Benutzen Sie eine hübsche Baumzerlegung.

Aufgabe 3. (Win/Win)

1. NONBLOCKER

Gegeben: $G(V, E)$, und der Parameter k .

Wir fragen: Gibt es eine Menge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq k$ so daß für alle $v \in V'$ ein $u \in V \setminus V'$ existiert mit $v \in N(u)$.

Andere Beschreibung: Eine Nonblocker-Menge ist das Komplement einer dominierenden Menge.

Zeigen Sie, daß NONBLOCKER in $O(4^k + poly(n))$ lösbar ist.

Tipp: Wenden Sie eine Win/Win-Strategie an. Berechnen Sie als erstes eine *inklusions-maximale* unabhängige Menge I . Betrachten Sie das Komplement von I (genannt \bar{I}). Falls \bar{I} nicht wie gewünscht ist, ziehen Sie eine Teilaufgabe dieses Blattes heran.

Mitteilung: MINIMUM DOMINATING SET kann in $O(4^\ell + poly(n))$ für Graphen mit Baumweite ℓ gelöst werden.

2. K-INTERNAL SPANNING TREE

Gegeben: $G(V, E)$, und der Parameter k .

Wir fragen: Gibt es einen Spannbaum von G der mindestens k interne (nicht-Blatt) Knoten besitzt?

Die Knoten eines Spannbaum $S(V_S, E_S)$ kann man in eine Menge aus Blättern L und internen Knoten A aufteilen. Zeigen Sie:

- (a) Ein Graph besitzt entweder einen Spannbaum mit zwei Blättern oder einen Spannbaum sodaß L eine unabhängige Menge in G ist.
- (b) Falls G kein Vertex Cover mit maximaler Größe k hat, dann besitzt $(k+1)$ -INTERNAL SPANNING TREE eine Lösung.
- (c) Falls G ein Vertex Cover mit maximaler Größe k hat, dann besitzt $(2k+1)$ -INTERNAL SPANNING TREE keine Lösung.