Veröffentlicht in: Alexandra Geissler, Matthias Schneider (Hrsg.): Zwischen artes liberales und artes digitales. Beiträge zur traditionellen und digitalen Geisteswissenschaft (2016), S. 157–181. Marburg: Tectum.

Regressionsmodelle für Paneldaten

Von Bernhard Baltes-Götz

1 Einleitung

Wenn in empirischen Wissenschaftsdisziplinen mit eingeschränkten Möglichkeiten zur experimentellen Forschung kausal interpretierbare Erkenntnisse über Veränderungsprozesse (z. B. beim Einkommen von Arbeitnehmern oder beim Bruttoinlandsprodukt von Volkswirtschaften) angestrebt werden, dann kommt oft eine Panelstudie in Frage. Bei einer (im Rahmen organisatorischer Möglichkeiten) unveränderlichen Stichprobe werden dieselben Merkmale zu mehreren Zeitpunkten beobachtet, so dass Veränderungen und deren Ursachen besser als im reinen Querschnittsdesign untersucht werden können. Für die Sozialwissenschaften rechnet Brüderl damit, dass Paneluntersuchungen über kurz oder lang die Forschungspraxis dominieren werden.[1]

Auch im quantitativen Methodenarsenal der Geschichtswissenschaft ist die Panelanalyse ein empfehlenswerter Bestandteil, weil reichhaltige historische Daten auf eine Analyse durch Modelle mit überzeugender Erklärungskraft warten.

Modelle für Paneldaten behandeln die Effekte von (meist mehreren) unabhängigen Variablen (Regressoren) auf eine abhängige Variable (Kriterium). Sie gehören damit zur Klasse der Regressionsmodelle, die in der Ökonometrie[2], in der Psychologie[3], in der Soziologie[4] sowie in vielen anderen Disziplinen erfolgreich sind und auch in der quantitativen Geschichtswissenschaft dominieren.[5] Regressionsmodelle sind in der Regel sehr simpel im Vergleich zum behandelten Realitätsausschnitt.[6] Oft beschränken sie sich auf wenige Merkmale und lineare Effekte (z. B. von der Berufserfahrung auf die Höhe des Einkommens, vom Ausmaß der sozialen Ungleichheit in einer Gesellschaft auf das Bruttoinlandsprodukt). Die folgende Lagebeurteilung stammt vom angesehenen Methodiker George Box:

1 Brüderl (2010), S. 963.
2 Siehe z. B. Wooldridge (2013).
3 Siehe z. B. Eid et al. (2013).
4 Siehe z. B. Fox (2008).
5 Siehe z. B. Feinstein/Thomas (2002).
6 Fox (2008), S. 3.

»All models are wrong but some are useful.«[7]

Wer sich mit der Panelanalyse vertraut machen möchte, wird durch eine Vielfalt von Modellen und eine teilweise inkonsistente Terminologie irritiert.[8] Daher erscheint ein Versuch angemessen, mit diesem Beitrag die Übersicht zu verbessern. Die LeserInnen sollten Interesse an der quantitativen empirischen Forschung und Erfahrungen mit der linearen Regressionsanalyse mitbringen.[9]

2 Chancen und Komplikationen bei Paneldaten

Bei den im Idealfall zufällig ausgewählten Untersuchungseinheiten in einer Panelstichprobe werden dieselben Merkmale zu mindestens zwei Zeitpunkten bzw. in mindestens zwei Zeitperioden beobachtet, um das Wissen über die Einflussgrößen für ein zeitvariables Kriterium zu verbessern. Man könnte z. B. für eine studentische Stichprobe in den ersten fünf Studiensemestern die Prüfungsleistungen als abhängige Variable beobachten. Als potentielle Einflussgrößen kommen in Frage:

- Zeitvariable Regressoren
  Dazu gehören zeitvariable Merkmale der Untersuchungseinheiten (z. B. die studiumsfremde Wochenarbeitszeit in einem Semester), die Zeit selbst (z. B. bisherige Studiendauer) sowie Eigenschaften der Zeitpunkte bzw. -intervalle (z. B. Prüfungsbedingungen in einem Semester).
- Zeitkonstante Regressoren (z. B. Geschlecht oder Kompetenz der Studierenden)

In der Regel ist in einer Panelstudie die Anzahl N der Untersuchungseinheiten relativ groß (z. B. 100) und die Anzahl T der Zeitpunkte bzw. Perioden relativ klein (z. B. fünf). Meist wird für alle Untersuchungseinheiten ein *fixierter* Beobachtungsplan verwendet (z. B. mit Erhebungen in 5 festgelegten Jahren). Es sind aber auch *individuelle* Beobachtungspläne möglich. Sind bei einem fixierten Plan alle Beobachtungen vorhanden, spricht man von einem *balancierten* Panel. Diese Situation ist in der Praxis aus organisatorischen Gründen selten anzutreffen und bei den statistischen Analysemethoden für Paneldaten in der Regel nicht erforderlich.

7 Box (1979), S. 202.

8 Zu den bei Panelmodellen zentralen Begriffen *Fixed Effects* und *Random Effects* schreibt Gelman (2005) als ausgewiesener Experte: »People are always asking me if I want to use a fixed or random effects model for this or that. I always reply that these terms have no agreed-upon definition.«

9 Statt geschlechtsneutraler Sprachkomplikationen wird ab jetzt die männliche Form verwendet.

Die mehrfach beobachteten Untersuchungseinheiten (z. B. Volkswirtschaften, Unternehmen oder Personen) werden im Folgenden als *Individuen* bezeichnet.

2.1 Chancen

Panelstudien bieten gegenüber der querschnittlichen Beobachtung von N Individuen zu *einem* Zeitpunkt viele methodische Vorteile.[10] Wir konzentrieren uns auf zwei Aspekte:

Direkte Beobachtung von Veränderungen

Im Längsschnitt lassen sich Veränderungen von Individuen bei einer abhängigen Variablen direkt beobachten und auf Veränderungen bei zeitvariablen Regressoren sowie auf moderierend wirkende zeitkonstante Regressoren zurückführen. In einer von Allison[11] berichteten Panelanalyse zur Armut in den Familien weiblicher Teenager in den USA befanden sich im ersten und im fünften Untersuchungsjahr ca. 35 % der 1 151 Familien unter der Armutsgrenze. Während diese querschnittlichen Auswertungen statische Verhältnisse suggerieren, haben sich im 4-Jahres-Intervall zwischen den beiden Zeitpunkten 211 Familien aus der Armut heraus und 234 Familien in die Armut hinein bewegt. Paneldaten liefern Aufschlüsse darüber, in welchem Ausmaß und unter welchen Bedingungen die Armutsgrenze in beiden Richtungen überschritten wird.

Unverzerrte Schätzung von Veränderungseffekten

In einer Beobachtungsstudie mit Querschnittsdesign ist es kaum möglich, die Effekte von zeitvariablen Regressoren auf ein Kriterium unverzerrt zu schätzen. Unter den potentiellen Störvariablen, für die aus kausalitätstheoretischen Gründen Unkorreliertheit mit den Regressoren angenommen werden muss, befinden sich auch die unbeobachteten zeitkonstanten Merkmale der Individuen. In einem häufig diskutierten Beispiel geht es um den möglichen Effekt der Eheschließung auf das Einkommen von Männern.[12] Für den querschnittlich zu beobachtenden Gehaltsunterschied zugunsten der verheirateten Männer sorgt die

10 Siehe z. B. Brüderl (2010), S. 964 ff.; Hedeker/Gibbons (2006), S. 1 ff.
11 Allison (2009), S. 28 ff.
12 Siehe z. B. Brüderl (2010), S. 968 ff.

relativ zeitkonstante, in den Studien nicht erhobene Qualifikation der Probanden, die sich sowohl auf das Einkommen als auch auf die Ehewahrscheinlichkeit positiv auswirkt. In einer Panelstudie kann man sich zur Vermeidung kausaler Fehlschlüsse auf die *intraindividuelle* Variation der Regressoren beschränken und deren Effekte auf das Kriterium untersuchen. Auf diese *Veränderungseffekte* können sich Korrelationen zwischen den Regressoren und beliebigen zeitkonstanten Merkmalen der Individuen nicht auswirken. Die technische Umsetzung besteht im Spezialfall einer Studie mit zwei Beobachtungszeitpunkten schlicht darin, für alle Variablen die Differenzen zwischen den Zeitpunkten zu bilden.

2.2 Komplikationen

In einer Panelstudie korrelieren in aller Regel die für ein Individuum zu verschiedenen Zeitpunkten ermittelten Kriteriumswerte positiv miteinander, so dass die für Standardverfahren wie die lineare Regressionsanalyse benötigte Voraussetzung unabhängiger Residuen in der Regel verletzt ist. Als weitere Komplikationen können sich einstellen:

- Abhängigkeit der Korrelationshöhe vom Zeitabstand
- Zunahme der Varianz mit der Zeit (Heteroskedastizität)

Diese Komplikationen sind bei der Auswertung zu berücksichtigen, um eine fehlerhafte Inferenzstatistik zu vermeiden. Im Vergleich zu Modellen für Querschnittsdaten steigen die Anforderungen an die methodische Kompetenz der Wissenschaftler und die Leistungsfähigkeit der Analyse-Software.

In diesem Beitrag werden Verfahren für Paneldaten vorgestellt, die eine flexible Analyse bei korrekter Berücksichtigung der Abhängigkeitsstruktur erlauben. An der üblichen Praxis orientiert wird für zu modellierende Paneldaten ein fixierter Beobachtungsplan unterstellt, so dass für alle Individuen die Zeitpunkte bzw. Zeitperioden identisch definiert sind. Allerdings können die verwendeten Analyseverfahren auch Individuen mit teilweise fehlenden Beobachtungen einbeziehen.

3 Modelle für Paneldaten

Bei der anschließenden Darstellung von Modellarchitekturen wird ein intervallskaliertes Kriterium mit normalverteilten Residuen angenommen. Auf Modelle für Kriterien mit einem alternativen Messniveau wird in Abschnitt 4 hingewiesen.

Um einen Eindruck von der für Panelanalysen angemessenen Datenorganisation zu vermitteln, sind in Abbildung 1 für ein Beispiel ($T = 10$, Kriterium Y, zeitvariabler Regressor X, zeitkonstanter Regressor Z) die beiden ersten Individuen zu sehen:

	Region	Zeit	Z	X	Y
1	1	1	0.1	5.8	30.5
2	1	2	0.1	2.8	34.7
3	1	3	0.1	6.4	37.3
4	1	4	0.1	4	25
5	1	5	0.1	4.2	25.8
6	1	6	0.1	8.2	26.1
7	1	7	0.1	6.7	26.5
8	1	8	0.1	4.3	33.4
9	1	9	0.1	4.7	28
10	1	10	0.1	4.1	30.6
11	2	1	4.1	21.7	24.1
12	2	2	4.1	23.1	23.3
13	2	3	4.1	23.5	20.8
14	2	4	4.1	25.4	25.9
15	2	5	4.1	25.2	28.1
16	2	6	4.1	20.6	29.4
17	2	7	4.1	23	33.4
18	2	8	4.1	22.1	24.5
19	2	9	4.1	22.4	29
20	2	10	4.1	22	31

Abbildung 1: Datenorganisation für eine Panelanalyse

3.1 Pooled-OLS-Modell

Wir starten mit einem Modell, das die potentiellen Abhängigkeiten zwischen den von einem Individuum stammenden Daten ignoriert und von einem Pool mit $N \times T$ eigenständigen Fällen ausgeht. Im Modell für das Kriterium Y_{it} können zeitvariable und zeitkonstante Regressoren (notiert durch $X_{j_{it}}$ bzw. Z_{k_i}) vertreten sein. Die Residuen R_{it} sind modellgemäß identisch normalverteilt mit dem Erwartungswert 0:[13]

$$Y_{it} = \alpha + \beta_1 X_{1_{it}} + \ldots + \beta_J X_{J_{it}} + \gamma_1 Z_{1_i} + \ldots + \gamma_K Z_{K_i} + R_{it},$$
$$i = 1, \ldots, N,\ t = 1, \ldots, T \tag{1}$$

Weil zur Schätzung der Parameter die Kleinstquadrattechnik (*Ordinary Least Squares*, *OLS*) verwendet wird, spricht man vom *Pooled-OLS-Modell* (*POLS-Modell*).

Es liefert konsistente, d. h. für $N \to \infty$ beliebig genaue Parameterschätzungen, sofern die Residuen *nicht* mit den Regressoren korrelieren, also die *Exogenität* der Regressoren gewährleistet ist:[14]

$$\mathrm{Cor}\,(X_{j_{it}}, R_{it}) = \mathrm{Cor}\,(Z_{k_i}, R_{it}) = 0$$

Vertrauensintervalle und Signifikanztests zu den Regressionskoeffizienten sind korrekt, sofern die von einem Individuum stammenden Residuen unkorreliert sind:

$$\mathrm{Cor}\,(R_{is}, R_{it}) = 0$$

Allerdings sind die bei einem Individuum zu verschiedenen Zeitpunkten vorgenommenen Messungen in der Regel positiv korreliert, und es wird nur selten gelingen, durch ein perfekt mit Regressoren bestücktes Modell unkorrelierte Residuen zu erzielen. Ignorierte positive Residualkorrelationen verursachen unterschätzte Standardfehler zu den Regressionskoeffizienten und damit unterschätzte Vertrauensintervalle sowie eine erhöhte Rate von Fehlern erster Art bei den Signifikanztests (irrtümliches Verwerfen einer gültigen Nullhypothese). Zum Ausmaß des Fehlers trägt neben der Residualkorrelationshöhe und der Anzahl der Zeitpunkte auch die Höhe der Korrelationen zwischen den zu verschiedenen Zeitpunkten gemessenen Werten eines Regressors bei, so dass zeitstabile Regressoren stärker betroffen sind als zeitvariable Regressoren.[15]

13 Die Laufbereiche der Indizes *i* (für die Individuen) und *t* (für die Zeitpunkte) werden ab jetzt der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

14 Cameron/Trivedi (2005), S. 702.

15 Petersen (2009).

Wegen der unterschätzten Standardfehler muss man das Pooled-OLS-Modell nicht unbedingt verwerfen, sondern kann durch Panel-korrigierte Standardfehler für eine Inferenzstatistik mit akzeptabler Präzision sorgen.[16]

Mit dem Risiko, dass relevante Regressoren im Modell fehlen, und infolgedessen die Effekte der vorhandenen Regressoren verzerrt geschätzt werden (verletzte Exogenität) hat die statistisch-empirische Forschung zu leben gelernt, weil viele Regressionsmodelle für Beobachtungsdaten davon betroffen sind. Paneldaten ermöglichen es aber, die durch intraindividuelle Veränderungen von Regressoren bewirkten Effekte so zu schätzen, dass unberücksichtigte *zeitkonstante* Regressoren *nicht* zu Verzerrungen führen. Mit dem Pooled-OLS-Modell lässt sich dieser kausalitätstheoretische Vorzug von Paneldaten nicht nutzen.[17]

3.2 Beispiel: Evaluation einer Präventionsmaßnahme

Bevor wir uns mit Panel-adäquaten Modellansätzen beschäftigen, soll in einer Simulationsstudie demonstriert werden, wie die Ergebnisse einer POLS-Analyse durch ausgelassene zeitstabile Regressoren verzerrt werden können. Später müssen sich alternative Modelle bei denselben Daten bewähren. Der Anschaulichkeit halber wird den simulierten Daten eine Story unterlegt.[18] Es geht um die Wirksamkeit von Maßnahmen zur Waldbrandprävention (z. B. Beobachtungsposten). Für 80 Regionen werden über 10 Jahre beobachtet:

– Ausgaben für die Waldbrandprävention, erfasst in den Variablen X_{it}
– Die von Waldbränden betroffenen Flächen, erfasst in den Variablen Y_{it}

Für die Y_{it}-Werte in den Regionen und Jahren gilt in der Kunstwelt das folgende wahre Modell:

$$Y_{it} = \alpha_i - 0{,}5\, X_{it} + R_{it} \tag{2}$$

16 Siehe z. B. Cameron/Trivedi (2005).

17 Mit dieser Beurteilung ist die allgemein übliche Verwendung des POLS-Modells gemeint. In Abschnitt 3.5 wird in Verbindung mit dem Within-Between-Modell erläutert, wie die Analyse von Paneldaten durch die Verwendung von speziell definierten Regressoren erheblich verbessert werden kann. Diese Ideen könnte man auf das POLS-Modell übertragen.

18 Weil die künstliche Welt zur Demonstration von einigen methodischen Komplikationen und Varianten herhalten muss, konnte beim Design nur beschränkt auf Realitätsnähe geachtet werden.

Dabei steht α_i für die erwartete jährliche Schadfläche in der Region *i* bei Verzicht auf Präventionsmaßnahmen ($X_{it} = 0$). Man kann die α_i-Werte als *individuelle Effekte* oder *Ordinatenabschnitte* bezeichnen. In der Kunstwelt gehen die individuellen Effekte auf drei zeitstabile Regressoren Z_1, Z_2 und Z_3 sowie ein Residuum zurück:[19]

$$\alpha_i = Z_{1_i} + Z_{2_i} + Z_{3_i} + R_{\alpha_i} \tag{3}$$

Der Anschaulichkeit halber sollen den zeitkonstanten Regressoren die folgenden Bedeutungen angeheftet werden:

- Z_1: Natürliche Ursachen für Waldbrände
- Z_2: Touristische Nutzung des Waldes
- Z_3: Brandstiftung (z. B. zur Gewinnung von Bauland)

Die Modellgleichung (2) wird komplettiert durch unbekannte zeitvariable Einflüsse im Residuum R_{it}.

Für den Präventionsaufwand in der Region *i* im Jahr *t* sorgt in der Kunstwelt die folgende Gleichung:

$$X_{it} = Z_{1_i} + Z_{2_i} + S_i + R_{X_{it}} \tag{4}$$

Die Waldbrandrisiken Z_1 und Z_2 (nicht jedoch Z_3) beeinflussen den Präventionsaufwand. Außerdem sind weitere Eigenschaften der Regionen für den Präventionsaufwand verantwortlich (z. B. Bedeutung des Waldes für die Wirtschaft), die in Gleichung (4) durch das Symbol S_i vertreten werden. Schließlich werden zeitvariable Einflüsse (z. B. Haushaltslage) angenommen, die in Gleichung (4) durch das Symbol $R_{X_{it}}$ vertreten sind.

Als politische Entscheidungsgrundlage ist ein möglichst genaues Wissen um die Wirksamkeit der Präventionsmaßnahmen hochrelevant. Zur Schätzung kommen verschiedene Modelle in Frage, deren Vor- und Nachteile anschließend demonstriert werden. Laut Standardannahme über die simulierte Welt sind die zeitstabilen Regressoren Z_1, Z_2 und Z_3 *nicht* beobachtet worden. Gelegentlich werden Varianten der Kunstwelt betrachtet.

Zuerst analysieren wir die Daten in der Standardkonfiguration mit dem folgenden POLS-Modell:

19 Im Text werden Variablen oft ohne Indizes für Regionen und Jahre notiert (z. B. Z_1 statt Z_{1_i}), wenn es der Klarheit nicht schadet. Weil das Anwendungsbeispiel nur *einen* zeitvariablen Regressor enthält, bleibt sein Symbol ohne Nummer (z. B. X_{it} statt $X_{1_{it}}$).

$$Y_{it} = \alpha + \beta X_{it} + \tilde{R}_{it}$$

Im Modell wird vernachlässigt, dass die Regressoren X_{it} mit den Residuen $\tilde{R}_{it}$ korrelieren, weil letztere auch die individuellen Effekte α_i enthalten:

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_i + R_{it}$$

Infolgedessen ist das geschätzte Regressionsgewicht (– 0,157) im Vergleich zum wahren Effekt (von – 0,5) drastisch verzerrt:

$$\hat{Y}_{it} = 28{,}445 - 0{,}157\ \mathrm{X}_{\mathrm{it}}$$

$$(0{,}572) \quad (0{,}034)$$

Außerdem werden die Standardfehler (eingeklammerte Werte in der unteren Ergebniszeile) unterschätzt, weil das Modell von 80×10 *unabhängigen* Fällen ausgeht, also die Abhängigkeit der 10 aus einer Region stammenden Beobachtungen ignoriert. Im Datensatz ist weniger Information über die Parameter vorhanden als vom statistischen Kalkül angenommen, und infolgedessen wird für die Parameterschätzungen eine zu geringe Streuung berechnet.

In der Abbildung 2 sind für 8 Regionen die Regressionen der Schadenshöhe auf den Präventionsaufwand zu sehen, wobei mit einer Ausnahme eine kostendämpfende Wirkung der Prävention abzulesen ist. Die mit den Daten *aller* Regionen geschätzte POLS-Regressionsgerade ist als unterbrochene Linie eingezeichnet.

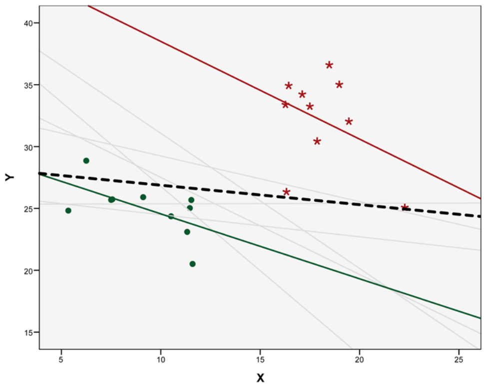

Abbildung 2: Regression von Schadenshöhe auf Präventionsaufwand für 8 Regionen und gemeinsame POLS-Regressionsgerade für alle Regionen (unterbrochene Linie)

Für zwei Regionen mit einem relativ niedrigen bzw. hohen Schadensniveau sind die Regressionsgeraden hervorgehoben und die Einzelbeobachtungen als Kreise bzw. Sterne eingetragen. So wird optisch plausibel, warum die POLS-Regressionsgerade keine nennenswerte Präventionswirkung vermuten lässt, obwohl in den meisten Regionen ein deutlicher Effekt besteht.

Im Beispiel ist durch die Anwendung eines POLS-Modells auf Paneldaten der Effekt eines zeitvariablen Regressors betragsmäßig *unterschätzt* worden. Unter entsprechend angepassten Bedingungen kann es zu einer Überschätzung kommen. Um das Risiko verzerrter Schätzungen zu minimieren, bieten sich folgende Maßnahmen an:

- Alle relevanten Regressoren beobachten und in das Modell einbeziehen.
  Dieses Ziel sollte immer angestrebt werden, ist aber in der Regel nicht vollständig realisierbar.
- Verwendung einer Panel-adäquaten Modellierung
  Mit Paneldaten lassen sich für *zeitvariable* Regressoren sogenannte *Within-Effekte* schätzen, die nicht durch Korrelationen zwischen den Regressoren und ausgelassenen *zeitstabilen* Regressoren verzerrt sein können.

3.3 Fixed-Effects-Modell

Das vor allem in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zur Analyse von Paneldaten favorisierte *Fixed-Effects (FE) – Modell*[20] erklärt die abhängige Variable durch zeitvariable Regressoren und individuelle Effekte α_i:

$$Y_{it} = \alpha_i + \beta_1 X_{1_{it}} + \ldots + \beta_J X_{J_{it}} + R_{it} \qquad (5)$$

Warum im Unterschied zum POLS-Modell (siehe Gleichung (1)) keine zeitkonstanten Regressoren möglich sind, wird gleich klar. Die oft als *idiosynkratische Fehler* bezeichneten Residuen sind modellgemäß für alle i und t voneinander unabhängig und identisch normalverteilt mit dem Erwartungswert 0.

Wie der Name *Fixed-Effects-Modell* zustande kam, zeigt die folgende alternative Modellformulierung:

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{1_{it}} + \ldots + \beta_J X_{J_{it}} + \sum_{h=2}^{N} a_h D_h + R_{it} \qquad (6)$$

20 Siehe z. B. Wooldridge (2013), Allison (2009).

Für $i = 2, \ldots, N$ wird eine Dummy-Variable D_i einbezogen mit dem Wert 1 für die Beobachtungen von Individuum i und dem Wert 0 für die Beobachtungen der übrigen Individuen.[21] In Gleichung (6) tauchen die individuellen Effekte α_i als Regressionskoeffizienten zu den Dummy-Variablen und damit als feste Parameter auf.

In der Dummy-Formulierung kann das FE-Modell mit jeder Software für das lineare Modell per Kleinstquadrattechnik geschätzt werden, so dass gelegentlich von der *LSDV-Methode* (*Least Squares Dummy Variables*) gesprochen wird.

Obwohl die Bezeichnung *Fixed-Effects-Modell* allgemein üblich ist, werden die individuellen Effekte in der aktuellen Literatur meist als Zufallsvariablen interpretiert.[22] Allerdings lohnt sich eine Debatte zu diesem Thema kaum, weil die Interpretation als feste Parameter äquivalent ist zur Auffassung, dass es sich um Zufallsvariablen handelt, die beliebige Korrelationen mit den zeitvariablen Regressoren besitzen dürfen.[23] Genau diese Liberalität verhindert inkonsistente (verzerrte) Effektschätzungen zu den zeitvariablen Regressoren und ist folglich ein kausalitätstheoretisch bedeutsamer Vorteil des FE-Modells:

$$\mathrm{Cor}\,(X_{jit}, \alpha_i) \neq 0 \textit{ erlaubt}!$$

Aus der Modellformulierung in Gleichung (6) folgt eine gravierende Einschränkung des FE-Modells: Es können keine zeitstabilen Regressoren aufgenommen werden, weil die Dummy-Variablen alle Unterschiede zwischen den Individuen aufklären.

Within-Modellformulierung

Zur Schätzung des FE-Modells ist die LSDV-Methode bei großen Stichproben (z. B. $N > 1\,000$) wenig geeignet, weil meist nur die Effekte der zeitvariablen Regressoren interessieren, andererseits aber die zahlreichen Parameter zu den Dummy-Variablen einen hohen Zeitaufwand verursachen. Für dieses Problem bietet die so genannte *Within-Transformation* des FE-Modells eine elegante Lösung. Bildet man für beide Seiten von Gleichung (5) das arithmetische Mittel über alle Zeitpunkte, dann resultiert die folgende Mittelwertsgleichung:

21 Zur Vermeidung einer linearen Abhängigkeit sind nur (N – 1) Indikatorvariablen möglich. Ein Individuum (bei der verwendeten Formulierung das erste) dient als Referenz und wird dabei nicht ›benachteiligt‹.

22 Siehe z. B. Wooldridge (2013), S. 478.

23 Allison (2009), S. 21.

$$\bar{Y}_{i.} = \alpha_i + \beta_1 \bar{X}_{1_{i.}} \ldots + \beta_J \bar{X}_{J_{i.}} + \bar{R}_{i.} \tag{7}$$

Darin ist z. B. die Variable $\bar{Y}_{i.}$ für das Individuum *i* folgendermaßen definiert:

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_{it}$$

Subtrahiert man die Mittelwertsgleichung von der FE-Modellgleichung (5), dann erhält man die Within-Formulierung des FE-Modells:

$$Y_{it} - \bar{Y}_{i.} = \beta_1 (X_{1_{it}} - \bar{X}_{1_{i.}}) + \ldots + \beta_J (X_{J_{it}} - \bar{X}_{J_{i.}}) + (R_{it} - \bar{R}_{i.}) \tag{8}$$

Gelegentlich wird zur Vereinfachung die folgende Notation verwendet:[24]

$$\ddot{Y}_{it} = \beta_1 \ddot{X}_{1_{it}} + \ldots + \beta_J \ddot{X}_{J_{it}} + \ddot{R}_{it}$$

Das transformierte Modell enthält weiterhin die interessierenden Regressionskoeffizienten aus Gleichung (5), während die individuellen Effekte α_i als zeitstabile Größen ›herausdifferenziert‹ worden sind. Auf die Effektschätzungen im Rahmen von Modell (8) können zeitkonstante Merkmale der Individuen trotz beliebiger Korrelationen mit den zeitvariablen Regressoren keinen verzerrenden Einfluss haben.[25]

Um eine konsistente Schätzung der Koeffizienten im Modell (8) zu gewährleisten, müssen die dortigen Regressoren mit den dortigen Residuen unkorreliert sein, und dies wird durch die *strikte Exogenität* der Regressoren im Modell (5) sichergestellt:[26]

$$\mathrm{Cor}\,(X_{j_{it}}, R_{is}) = 0 \tag{9}$$

Dabei wird für jeden Regressor verlangt, dass seine Korrelationen mit dem zeitgleichen sowie allen früheren und späteren Residuen gleich 0 sind.[27]

24 Z. B. in Wooldridge (2013) S. 467.

25 Genau genommen klappt das Herausdifferenzieren für ein Merkmal nur dann, wenn nicht nur seine Werte, sondern auch seine Effekte zeitstabil sind.

26 Siehe z. B. Wooldridge (2013), S. 452.

27 Im einfachen Modell mit einem *einzigen* Regressor *X* und *zwei* Zeitpunkten ist die Notwendigkeit der strikten Exogenität leicht einzusehen. In diesem Fall ist die Korrelation des Regressors mit dem Residuum (jeweils im Sinne von Modell (8)) genau dann gleich 0, wenn die *X*-Differenz und die *R*-Differenz eine Kovarianz von 0 besitzen:

$$\mathrm{Cov}\,(X_{i2} - X_{i1}, R_{i2} - R_{i1}) = 0$$

Diese Bedingung wird von der strikten Exogenität garantiert, was nach Anwendung einfacher Rechenregeln für Kovarianzen deutlich wird:

$$\mathrm{Cov}\,(X_{i2} - X_{i1}, R_{i2} - R_{i1}) = \mathrm{Cov}\,(X_{i2}, R_{i2}) + \mathrm{Cov}\,(X_{i1}, R_{i1}) - \mathrm{Cov}\,(X_{i2}, R_{i1}) - \mathrm{Cov}\,(X_{i1}, R_{i2})$$

Um die im transformierten Modell (8) zur Sicherung von konsistenten Schätzungen benötigte

Die Regressionskoeffizienten in Modell (8) können per Kleinstquadrattechnik geschätzt werden, wobei zwei Besonderheiten zu beachten sind.[28] Für die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Simulationsdaten liefert die Within-Formulierung des FE-Modells eine recht präzise Effektschätzung (wahrer Wert: – 0,5):

$$\hat{\ddot{Y}}_{it} = -0{,}498\,\ddot{X}_{it}$$
$$(0{,}075)$$

Bei fehlenden *zeitvariablen* Regressoren kann auch das FE-Modell nicht verhindern, dass die Koeffizienten zu den vorhandenen Regressoren verzerrt geschätzt werden.

Within- und Between-Effekt

In den FE-Modellgleichungen steht der Parameter β_j für die erwartete Änderung des Kriteriums bei einer intraindividuellen Veränderung des Regressors X_j um eine Einheit. Man kann vom *Veränderungseffekt* bzw. *Within-Effekt* sprechen und diese Bedeutung im Symbol für den Regressionsparameter durch ein angeheftetes W hervorheben: $\beta_j^{(W)}$. Wie speziell die Gleichung (8) verdeutlicht, beschränken sich die FE-Schätzmethoden auf die intraindividuelle Variation und liefern daher eine Schätzung $\hat{\beta}_j^{(W)}$ für den Within-Effekt.

Bei der Herleitung der Within-Modellformulierung wurde die Regression des intraindividuell über alle Zeitpunkte gemittelten Kriteriumswerts $\bar{Y}_{i.}$ auf die analog gemittelten Regressoren und die individuellen Effekte α_i betrachtet (siehe Gleichung (7)). Wenn man α_i und $\bar{R}_{i.}$ zu einem Residualterm $\tilde{R}_i$ zusammenfasst

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \bar{R}_{i.}$$

und noch einen Ordinatenabschnitt β_0 ergänzt, dann resultiert das folgende *Between (BE) – Modell*:

gewöhnliche Exogenität nachweisen zu können, wird also im Modell (5) die strikte Exogenität angenommen.

28 Eine Besonderheit der Within-Modellformulierung besteht darin, dass kein konstanter Term vorhanden ist. Außerdem ist bei den Vertrauensintervallen und Signifikanztests zu beachten, dass bei der Within-Transformation N Freiheitsgrade verloren gehen: Die T Werte $(Y_{it} - \bar{Y}_{i.})$ addieren sich für jedes Individuum zur Summe 0. Somit verbleiben $(NT - N - J)$ Freiheitsgrade, was bei Verwendung einer Software für das allgemeine lineare Modell manuell zu berücksichtigen ist (Wooldridge (2013), S. 468). Eine Panel-spezialisierte Software (z. B. das Stata-Kommando *xtreg* mit der Option *fe*) erledigt die Within-Transformation ebenso automatisch wie die Anpassung der Freiheitsgradzahl.

$$\bar{Y}_{i.} = \beta_0 + \beta_1^{(B)}\bar{X}_{1_{i.}} + \ldots + \beta_J^{(B)}\bar{X}_{J_{i.}} + \tilde{R}_i$$

Während beim POLS- und beim FE-Modell insgesamt $N \times T$ Messgelegenheitsfälle existieren, basiert das BE-Modell auf aggregierten Daten mit den N Individuen als Fällen. Weil die Individuen unabhängig voneinander sind, kann das BE-Modell per OLS-Technik geschätzt werden.

Der Regressionskoeffizient $\beta_j^{(B)}$ zu $\bar{X}_j$ soll als *Between-Effekt* bezeichnet werden, weil ausschließlich Unterschiede zwischen den Individuen eingehen. Er stimmt nur dann mit dem Within-Effekt $\beta_j^{(W)}$ überein, wenn der Regressor nicht mit den individuellen Effekten korreliert.[29] Ansonsten sind drastische Abweichungen möglich. Für die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Simulationsdaten zeigt das Streudiagramm in Abbildung 3 praktisch *keinen* Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Schadenshöhe und dem durchschnittlichen Präventionsaufwand:

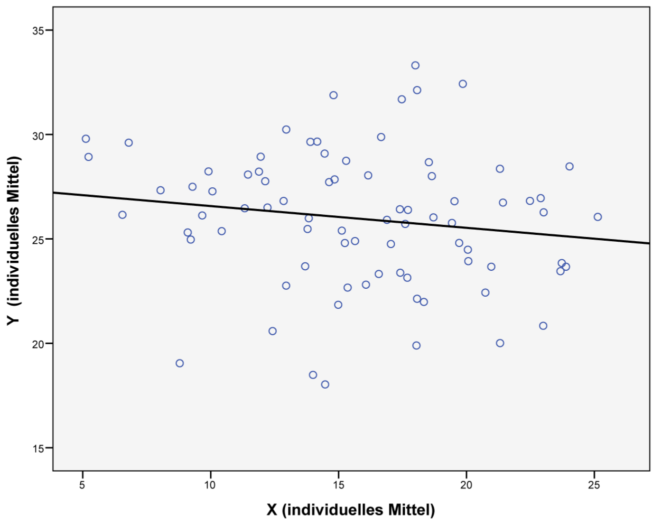

Abbildung 3: Regression der mittleren Schadenshöhe auf den mittleren Präventionsaufwand für die Waldbrand-Simulationsdaten

29 Wooldridge (2013), S. 467.

Wir erhalten per OLS-Regression aus der aggregierten Stichprobe mit 80 Regionen für $\beta^{(B)}$ den Schätzwert (–0,104):

$$\hat{\bar{Y}}_i = 27{,}617 - 0{,}104\,\bar{X}_{i.}$$
$$(1{,}265) \quad (0{,}077)$$

Die POLS-Regression (siehe Abschnitte 3.1 und 3.2) liefert als Effektschätzung $\hat{\beta}^{(PO)}$ einen Mix aus $\hat{\beta}^{(B)}$ und $\hat{\beta}^{(W)}$.[30] Divergieren $\beta^{(B)}$ und $\beta^{(W)}$, dann dürfen $\hat{\beta}^{(B)}$ und $\hat{\beta}^{(PO)}$ nicht intraindividuell interpretiert werden, weil ansonsten der im Beispiel demonstrierte *ökologische Fehlschluss* auftritt.[31]

Es spricht nichts dagegen, zeitkonstante Regressoren in das BE-Modell aufzunehmen:

$$\bar{Y}_{i.} = \beta_0 + \beta_1^{(B)}\,\bar{X}_{1_{i.}} + \ldots + \beta_J^{(B)}\,\bar{X}_{J_{i.}} + \gamma_1 Z_{1_i} + \ldots + \gamma_K Z_{K_i} + \bar{\bar{\tilde{R}}}_i$$

3.4 Random-Effects-Modell

Dem Fixed-Effects-Modell wird in der ökonometrischen Methodendiskussion unter dem Namen *Random-Effects (RE) – Modell* eine Alternative gegenübergestellt, die sich schnell als Random-Intercept-Modell im Sinne der Mehrebenenanalyse herausstellt.[32] Mit den Mehrebenenmodellen, die auch als *hierarchische lineare Modelle* oder als *gemischte Modelle* bezeichnet werden, lassen sich Paneldaten flexibel modellieren.[33] Alle im weiteren Verlauf des Beitrags vorgestellten Modelle für Paneldaten gehören zur Klasse der Mehrebenenmodelle.

---

30 Ist bei einem balanzierten Panel nur ein zeitvariabler und kein zeitkonstanter Regressor vorhanden, dann gilt nach Raudenbush/Bryk (2002), S. 137:

$$\hat{\beta}^{(PO)} = \eta^2\,\hat{\beta}^{(B)} + (1 - \eta^2)\,\hat{\beta}^{(W)}$$

Dabei steht η^2 für den durch Unterschiede zwischen den Individuen erklärten Anteil an der Quadratsumme des *Regressors*. Für die Simulationsdaten ergibt sich aus einem Anteil von 0,867 zusammen mit den Schätzern für den Between- und den Within-Effekt der in Abschnitt 3.2 per OLS-Regression ermittelte Schätzer $\hat{\beta}^{(PO)}$:

$$-0{,}157 = 0{,}867\,(-0{,}104) + (1 - 0{,}867)\,(-0{,}498)$$

31 Robinson (1950).

32 Brüderl (2010), S. 972.

33 Gute Darstellungen der Methodologie finden sich z. B. Raudenbush/Bryk (2002) und Snijders/Bosker (2012).

Wie das FE-Modell enthält auch das RE-Modell individuelle Ordinatenabschnitte (Effekte), um die Abhängigkeit der von einem Individuum stammenden Beobachtungen zu erklären. Im Unterschied zum FE-Modell sind im RE-Modell neben zeitvariablen Regressoren auch zeitkonstante Regressoren erlaubt. In der folgenden Zweiebenendarstellung ist die Logik des RE-Modells gut erkennbar:[34]

$$Y_{it} = \alpha_i + \beta_1 X_{1_{it}} + \ldots + \beta_J X_{J_{it}} + R_{it}$$

$$\alpha_i = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_{1_i} + \ldots + \gamma_{0K} Z_{K_i} + U_{0i}$$

Die zeitvariablen Regressoren (X_1, …, X_J) gehören zur Ebene der Zeitpunkte, und die zeitstabilen Regressoren (Z_1, …, Z_K) zur Ebene der Individuen. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wird anschließend gelegentlich die Ebene der Zeitpunkte als *Mikroebene* und die Ebene der Individuen als *Makroebene* bezeichnet.

Die Mikrogleichung stimmt formal mit der FE-Modellgleichung (5) überein. In der Makrogleichung werden die individuellen Effekte partiell durch die zeitstabilen Regressoren erklärt. Die unerklärten Anteile U_{0i} (die Makroresiduen) bilden zusammen mit den Mikroresiduen R_{it} das Zweikomponenten-Residuum der zusammengesetzten RE-Modellgleichung:

$$Y_{it} = \gamma_{00} + \beta_1 X_{1_{it}} + \ldots + \beta_J X_{J_{it}} + \gamma_{01} Z_{1_i} + \ldots + \gamma_{0K} Z_{K_i} + U_{0i} + R_{it} \qquad (10)$$

Während das FE-Modell Korrelationen zwischen den individuellen Effekten α_i und den zeitabhängigen Regressoren explizit erlaubt, wird im RE-Modell für die Makroresiduen U_{0i} angenommen, dass sie mit allen Regressoren unkorreliert sind:

$$\mathrm{Cor}\,(X_{j_{it}}, U_{0i}) = \mathrm{Cor}\,(Z_{k_i}, U_{0i}) = 0$$

Zwar wird diese Annahme selten vollständig gerechtfertigt sein, doch kann ihre Plausibilität durch die Aufnahme von potentiell relevanten zeitstabilen Regressoren in das Modell erhöht werden.[35]

34 Die Doppelindizierung der γ-Parameter stammt aus dem allgemeinen Modell der Mehrebenenanalyse. Dort werden neben dem Ordinatenabschnitt noch weitere Erstebenenparameter durch Regressoren der zweiten Ebene modelliert, und der erste γ-Index steht für den zu erklärenden Erstebenenparameter.

35 Wird die *Zeit* als variabler Regressor einbezogen (über eine metrische Variable oder eine Serie von Dummy-Variablen), dann drohen *keine* Korrelationen mit den Makroresiduen, weil die Zeitvariablen keine interindividuelle Varianz besitzen.

Damit die Koeffizienten zu den Mikroregressoren konsistent geschätzt werden können, wird die im Zusammenhang mit dem FE-Modell vorgestellte *strikte Exogenität* auch im RE-Modell (und in allen anderen im weiteren Verlauf noch diskutieren Mehrebenenmodellen für Paneldaten) benötigt:[36]

$$\mathrm{Cor}\,(X_{jit}, R_{is}) = 0$$

Während das FE-Modell (zumindest in der Dummy-Formulierung, siehe Gleichung (6)) die individuellen Effekte als feste Parameter enthält, sind sie im RE-Modell durch Zufallsvariablen vertreten, für die eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und einer für alle Individuen identischen Varianz angenommen wird.

Das RE-Modell kann wie die anderen im weiteren Verlauf noch vorzustellenden Mehrebenenmodelle für Paneldaten im Unterschied zum POLS-, BE-, oder FE-Modell *nicht* mit einer Prozedur für das lineare Modell per Kleinstquadrattechnik geschätzt werden. Allerdings sind zur Analyse von Mehrebenenmodellen zahlreiche Software-Lösungen verfügbar.[37]

Ist ein zeitvariabler Regressor X_j mit den Makroresiduen korreliert, so dass sein Within- und sein Between-Schätzer verschieden sind, dann liefert der RE-Schätzer $\hat{\beta}_i^{(RE)}$ zum Effekt von X_j eine *nicht-interpretierbare* Mischung, die sich von $\hat{\beta}_j^{(W)}$ und $\hat{\beta}_j^{(B)}$ sowie auch von $\hat{\beta}_j^{(PO)}$ unterscheidet.[38] Im Waldbrandbeispiel (siehe Abschnitt 3.2) liegt genau diese Situation vor, und wir erhalten für den Regressor Präventionsaufwand (mit dem wahren Within-Effekt −0,5) eine verzerrte Effektschätzung:

$$\bar{Y}_{it} = \underset{(0{,}943)}{30{,}940} - \underset{(0{,}055)}{0{,}314}X_{it}$$

36 Begründungsskizze: Zur Schätzung der Regressionskoeffizienten im RE-Modell kommt u. a. die GLS-Methode (*Generalized Least Squares*) in Frage. Dabei wird die OLS-Technik auf ein analog zu Gleichung (8) transformiertes Modell angewendet. Obwohl dort die Mittelwertsvariablen mit einem Vorfaktor eingehen (siehe z. B. Wooldridge (2010), Kapitel 10), kann die Argumentation aus dem FE-Modell analog übernommen werden, um die Notwendigkeit der strikten Exogenität im RE-Modell zu begründen.

37 In der freien Statistik-Programmierumgebung *R* eignen sich die Pakete *lme4*, *nlme* und *MCMCglmm*. In *SPSS* können die Prozeduren *MIXED* und *GENLINMIXED* verwendet werden. In *Stata* eignen sich für metrische Kriterien die Funktionen *xtreg* (mit der Option *re*) und *xtmixed*. In dieser von persönlichen Erfahrungen geprägten Liste fehlen etliche, ebenfalls sehr gut geeignete Programme (z. B. *HLM*, *MLwiN*, *Mplus*, *SAS*).

38 Raudenbush/Bryk (2002), S. 139.

Zeitstabile Regressoren im RE-Modell

Für Korrelationen zwischen den Makroresiduen und den Regressoren des RE-Modells sind vor allem ausgelassene zeitkonstante Regressoren verantwortlich. Folglich kann das Problem durch die Erfassung und Berücksichtigung von relevanten zeitkonstanten Regressoren reduziert werden. In der simulierten Kunstwelt entstehen die individuellen Effekte aus drei zeitstabilen Regressoren und einem Zufallsanteil (siehe Gleichung (3)), wobei die zeitstabilen Regressoren Z_1, Z_2 und Z_3 bislang als unbeobachtet galten. Nun verschieben wir in der künstlichen Welt vorübergehend die Grenze des Wissens und nehmen den zeitstabilen Regressor Z_1 in das RE-Modell auf. Im erweiterten Modell rückt der RE-Schätzer $\hat{\beta}^{(RE)}$ zum Effekt des zeitvariablen Regressors näher an den wahren Within-Effekt (−0,5) heran:

$$\hat{Y}_{it} = \underset{(0{,}990)}{29{,}552} - \underset{(0{,}058)}{0{,}382} X_{it} + \underset{(0{,}193)}{0{,}663} Z_{1_i}$$

Präzision verschiedener Schätzmethoden bei Gültigkeit des RE-Modells

Sind die Annahmen des RE-Modells erfüllt, dann liefert es konsistente Schätzer, die im Vergleich zu den Schätzern der im Beitrag betrachteten Alternativmodelle eine höhere Präzision besitzen. Um dies zu illustrieren, nehmen wir vorübergehend für die in Abschnitt 3.2 beschriebe Kunstwelt an, dass der zeitvariable Regressor (Präventionsaufwand) von den individuellen Effekten auf das Kriterium unabhängig sei. Unter dieser Voraussetzung liefern alle beschriebenen Modelle für den Präventionsaufwand eine konsistente Schätzung seines Within-Effekts. In einer Simulationsstudie wurden 250 Stichproben gezogen und mit allen Modellen analysiert. Tabelle 1 enthält diverse Statistiken zur Präzision der Schätzer.

Modell	Median der absoluten Fehler	Standardabweichung der Schätzwerte	Mittlerer berechneter Standardfehler
BE-Modell	0,069	0,102	0,107
POLS-Modell	0,050	0,084	0,043
FE-Modell	0,053	0,074	0,074
RE-Modell	0,043	0,061	0,061

Tabelle 1: Schätzergebnisse für den Präventionseffekt aus 250 simulierten Stichproben bei Gültigkeit des RE-Modells

Erwartungsgemäß zeigt der RE-Schätzer den kleinsten Median der absoluten Schätzfehler und die kleinste Standardabweichung der Schätzwerte. Für den POLS-Schätzer ist aufgrund der ignorierten Abhängigkeitsstruktur eine drastische Abweichung zwischen der tatsächlichen und der kalkulierten Variabilität festzustellen.

3.5 Within-Between-Modell

Ist im RE-Modell für einen zeitabhängigen Regressor die kritische Annahme der Unkorreliertheit mit dem Makroresiduum falsch, dann resultiert eine verzerrte Effektschätzung. Diese kausalitätstheoretische Schwäche des RE-Modells ist aber leicht zu beheben, indem zu jedem potentiell betroffenen zeitvariablen Regressor die aus Abschnitt 3.3 bekannte Mittelwertsvariable $\bar{X}_{ji.}$ zusätzlich in das Modell aufgenommen wird:

$$\bar{X}_{ji.} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{jit}$$

So entsteht das *Correlated Random Effects (CRE) – Modell*:[39]

$$Y_{it} = \gamma_{00} + \beta_1 X_{1_{it}} + \delta_{01}\bar{X}_{1_{i.}} + \gamma_{01} Z_{1_i} + U_{0i} + R_{it} \qquad (11)$$

Wie schon Mundlak[40] gezeigt hat, ist der Parameter β_1 identisch mit dem Within-Effekt des zeitvariablen Regressors X_1 im korrespondierenden FE-Modell (ohne

39 Siehe Wooldridge (2013), S. 479 ff. Im Namen des Modells kommt zum Ausdruck, dass Korrelationen zwischen den individuellen Effekten und den zeitvariablen Regressoren erlaubt sind. In diesem Abschnitt enthalten die Modellgleichungen der Übersichtlichkeit halber generell nur *einen* zeitvariablen und *einen* zeitkonstanten Regressor.

40 Mundlak (1978).

zeitstabile Regressoren). Ferner ist der Parameter δ_{01} zum Regressor $\bar{X}_{1_{i.}}$ identisch mit der Differenz zwischen dem Between- und dem Within-Effekt von X_1.

Aus dem CRE-Modell ergibt sich durch einfaches Umgruppieren der Terme eine Variante, die zu jedem zeitvariablen Regressor die intraindividuell zentrierten Messungen $(X_{j_{it}} - \bar{X}_{j_{i.}})$ zusammen mit dem Mittelwertsregressor $\bar{X}_{j_{i.}}$ enthält und von vielen Autoren als *Hybrid-Modell* bezeichnet wird:[41]

$$Y_{it} = \gamma_{00} + \beta_1\,(X_{1_{it}} - \bar{X}_{1_{i.}}) + (\beta_1 + \delta_{01})\bar{X}_{1_{i.}} + \gamma_{01} Z_{1_i} + U_{0i} + R_{it}$$

Aus den Aussagen über β_1 und δ_{01} folgt unmittelbar, dass in diesem Modell der Regressionskoeffizient zu $\bar{X}_{1_{i.}}$ gerade der Between-Effekt von X_1 ist. Mit den aus Abschnitt 3.3 bekannten Symbolen lässt sich das Modell folgendermaßen notieren:

$$Y_{it} = \gamma_{00} + \beta_1{}^{(W)}\,(X_{1_{it}} - \bar{X}_{1_{i.}}) + \beta_1{}^{(B)}\bar{X}_{1_{i.}} + \gamma_{01} Z_{1_i} + U_{0i} + R_{it} \qquad (12)$$

Als Ersatz für die wenig informative Bezeichnung *Hybrid-Modell* bietet sich der Name *Within-Between (WB) – Modell* an.

Intraindividuell zentrierte Zeitpunktregressoren sind mit allen zeitkonstanten Regressoren unkorreliert, also auch mit dem zugehörigen Mittelwertsregressor.[42] Damit bleibt der Within-Schätzer unverändert, wenn man aus dem Modell (12) den Mittelwertsregressor entfernt oder eine andere Veränderung bei der Ausstattung mit zeitkonstanten Regressoren vornimmt.

Auf die simulierten Waldbranddaten (vgl. Abschnitt 3.2) angewendet liefert das WB-Modell erwartungsgemäß für $\beta^{(W)}$ denselben Schätzer wie das FE-Modell und für $\beta^{(B)}$ denselben Schätzer wie das BE-Modell, wobei auch die Standardfehler (eingeklammert in der zweiten Ergebniszeile) übereinstimmen (vgl. Abschnitt 3.3):[43]

$$\hat{Y} = \underset{(1{,}265)}{27{,}617} - \underset{(0{,}075)}{0{,}498}\,(X_{it} - \bar{X}_{i.}) - \underset{(0{,}077)}{0{,}104}\,\bar{X}_{i.}$$

41 Z. B. Allison (2009), S. 23 ff.

42 Kreft/de Leeuw (1998), 135 f.

43 Das BE- und das WB-Modell liefern nur für ein *balanziertes* Panel denselben $\beta^{(B)}$-Schätzer (samt Standardfehler). Im *unbalanzierten* Fall unterscheiden sich die Ergebnisse, weil die RE-Schätzung den von der individuellen Beobachtungszahl abhängigen Informationsgehalt berücksichtigt, während die OLS-Schätzung im BE-Modell alle Individuen gleichbehandelt.

Als generelle Vorteile des WB-Modells gegenüber dem FE-Modell sind zu nennen:

– Es liefert für zeitvariable Regressoren neben dem Within-Schätzer auch den Between-Schätzer.
– Es kann auch zeitkonstante Regressoren aufnehmen.

Eine wichtige Eigenschaft des CRE-Modells ist noch nicht ausreichend diskutiert worden: Der Regressionskoeffizient zu $\bar{X}_{1_{i.}}$ schätzt die Differenz $(\beta_1^{(B)} - \beta_1^{(W)})$, und sein Signifikanztest erlaubt eine Beurteilung der Nullhypothese

$$\mathrm{H}_0\colon \beta_1^{(B)} = \beta_1^{(W)}$$

Im simulierten Beispiel wird diese Nullhypothese klar verworfen ($p < 0{,}001$):

$$\hat{Y} = \underset{(1{,}265)}{27{,}617} - \underset{(0{,}075)}{0{,}498}\, X_{it} + \underset{(0{,}107)}{0{,}394}\, \bar{X}_{i.}$$

Ist sie korrekt, kann man auf den Mittelwertsregressor $\bar{X}_{1_{i.}}$ verzichten.

Um die Within-Between-Identität simultan für *alle* zeitabhängige Regressoren zu beurteilen, kann man das CRE-Modell und das darin geschachtelte (durch Streichung der Mittelwertsregressoren hervorgehende) RE-Modell über einen Likelihood-Quotienten-Test vergleichen.

Traditionell wird der so genannte *Hausman-Spezifikationstest* für Paneldatenmodelle dazu verwendet, für zeitvariable Regressoren die Schätzer aus dem FE– und dem RE-Modell auf Identität zu beurteilen, um eine Entscheidung zwischen diesen beiden Modellen herbeizuführen.[44] Mit den Tests zu den Mittelwertsregressoren bietet das CRE-Modell eine bequeme und vielfach empfohlene Alternative zum Hausman-Test.[45]

Während einige Autoren den Between-Effekt als wenig erhellend oder als irrelevant beurteilen[46], sehen andere dahinter einen Prozess von eigenständigem Interesse.[47] Bei Forschungsarbeiten in der Mehrebenentradition ist es üblich, zeitvariable Regressoren als intraindividuell zentrierte Variable *und* als Mittelwertsvariable aufzunehmen.[48] Man möchte Niveaueffekte separieren von Veränderungseffekten (z. B. bei der Höhe von Steuern oder bei der Dosierung von Medikamenten).

---

44 Hausman (1978).
45 Allison (2009), S. 25, Wooldridge (2013), S. 480.
46 Allison (2009), S. 25, Brüderl (2010), S. 977.
47 Z. B. Bell/Jones (2015), Snijders/Bosker (2012).
48 Siehe z. B. Hedeker/Gibbons (2006), S. 72 ff.

Durch fehlende Makroregressoren kann es auch im WB-Modell zu verzerrten Effektschätzungen kommen, wenn auch nicht bei den *geschützten* Mikroregressoren. In der seit Abschnitt 3.2 betrachteten Kunstwelt hängt der Flächenverlust durch Waldbrände (in der Region i, im Jahr t) auch von den Makroregressoren Z_1 (Natürliche Ursachen), Z_2 (Touristische Nutzung des Waldes) und Z_3 (Brandstiftung) ab. Weil die beiden ersten Regressoren auch den zeitvariablen (pro Jahr festgestellten) Präventionsaufwand beeinflussen, unterscheiden sich der Between- und der Within-Effekt des Präventionsaufwands. Stehen für ein WB-Modell neben dem intraindividuell zentrierten Regressor $(X_{it} - \bar{X}_{i.})$, der anschließend aus Platzgründen wie in Abschnitt 3.3 mit $\ddot{X}_{it}$ notiert wird, und dem Mittelwertsregressor $\bar{X}_{i.}$ nur Z_1 und Z_3 zur Verfügung, dann wird der Effekt von Z_3 konsistent, der Effekt von Z_1 hingegen verzerrt geschätzt (wahrer Wert für beide Regressoren: 1):[49]

$$\begin{array}{rl} \hat{Y}_{it} = & 22{,}653 - 0{,}498\,\ddot{X}_{it} - 0{,}217\,\bar{X}_{i.} + 0{,}546\,Z_{1_i} + 1{,}196\,Z_{3_i} \\ & (1{,}013) \quad (0{,}075) \qquad (0{,}062) \qquad (0{,}145) \qquad (0{,}130) \end{array}$$

4 Resümee

Panelstudien eignen sich für viele Wissenschaftsdisziplinen, wenn Veränderungen (zum Beispiel beim Zigarettenkonsum) und deren Einflussfaktoren (zum Beispiel der Zigarettenpreis) anhand von Beobachtungsdaten untersucht werden sollen. Bei einem zeitvariablen Regressor erlauben Paneldaten die Unterscheidung zwischen seinem Between- und seinem Within-Effekt, die sehr unterschiedlich ausfallen können. Zum Beispiel haben beim Zigarettenpreis ländervergleichende Studien keine Belege für einen Between-Effekt auf den Zigarettenkonsum geliefert, während deutliche Hinweise auf einen (negativen) Within-Effekt vorliegen.[50]

49 Das Fehlen von Z_2 führt zu einer verzerrten Z_1-Effektschätzung, weil Z_1 und Z_2 auf das Kriterium *und* auf den Mikroregressor einwirken. Im Detail:
- Es ist der Effekt einer Erhöhung von Z_1 um eine Einheit bei *festen* Werten von $\bar{X}_{i.}$ und Z_3 zu schätzen.
- Weil Z_1 auf $\bar{X}_{i.}$ steigernd wirkt, ist die Konstanz von $\bar{X}_{i.}$ trotz Erhöhung von Z_1 nur durch eine gleichzeitige *Reduktion* des im Modell nicht vertretenen und ebenfalls auf $\bar{X}_{i.}$ steigernd wirkenden Regressors Z_2 zu erklären.
- Durch die Z_2-Reduktion sinkt der Kriteriumswert, und die steigernde Wirkung durch den Z_1-Zuwachs wird teilweise aufgehoben.
- Weil Z_3 *keinen* Einfluss auf den Mikroregressor hat, tritt hier kein analoger Effekt auf.

50 Snowdon (2012).

Die im Beitrag betrachteten Regressionsmodelle für Paneldaten unterscheiden sich erheblich in Bezug auf ihre Eignung zur differenzierten und unverzerrten Analyse von Within- und Between-Effekten:

- Im *Between-Modell* (siehe Abschnitt 3.3) werden Zeitmittelwerte für das Kriterium und die Regressoren gebildet, so dass ein querschnittliches Design mit *N* unabhängigen Fällen entsteht. Mit diesen aggregierten Daten lassen sich die Between-Effekte der Regressoren schätzen, über die meist wichtigeren Within-Effekte erfährt man hingegen nichts.
- Von der *gepoolten OLS-Regression* (siehe Abschnitt 3.1) erhält man für einen zeitvariablen Regressor eine Mischung aus dem Within- und dem Between-Effekt, die nur bei angenommener Identität interpretierbar ist. Weil die regulären OLS-Standardfehler meist unterschätzt sind, müssen sie durch robuste Varianten ersetzt werden.
- Auch das *Random-Effects-Modell* (siehe Abschnitt 3.4) liefert für einen zeitvariablen Regressor eine Mischung aus dem Within- und dem Between-Effekt. Ohne Identität der beiden Effekte ist der Schätzer unbrauchbar, *mit* Identität ist er präziser als die Schätzergebnisse der konkurrierenden Modelle. Nach Bedarf können zeitstabile Regressoren in das RE-Modell aufgenommen werden.
- Das *Fixed-Effects-Modell* (siehe Abschnitt 3.3) liefert zu einem zeitvariablen Regressor (bei Gültigkeit der strikten Exogenität) eine konsistente Schätzung des Within-Effekts, ignoriert aber den Between-Effekt. Außerdem bleiben zeitkonstante Regressoren außen vor. Wenngleich der Between-Effekt in vielen Fällen weniger relevant und zudem schwer zu interpretieren ist, gehört er doch zu einer vollständigen Beschreibung des zu modellierenden Systems.
- Mit dem *Within-Between-Modell* (siehe Abschnitt 3.5) lässt sich das komplette Bild eruieren, indem zu jedem zeitvariablen Regressor sowohl die intraindividuell zentrierte Variante als auch der Zeitmittelwert einbezogen wird. Man erhält den Within-Schätzer aus dem FE-Modell und den Between-Schätzer aus dem BE-Modell. Nach Bedarf können zeitstabile Regressoren in das WB-Modell aufgenommen werden.
- Das aus dem WB-Modell durch eine einfache Umformung entstehende *CRE-Modell* bietet eine bequeme Möglichkeit, den Within- und den Between-Effekt eines zeitvariablen Regressors miteinander zu vergleichen.

Weitere Optionen der linearen gemischten Modelle

Die beim RE-, beim WB- und beim CRE-Modell anwendbare Mehrebenentechnologie[51] erlaubt wesentliche Erweiterungen im Vergleich zu den bisher diskutierten Modellvarianten.

Bei Betrachtung des WB-Modells in Zweiebenennotation (siehe Abschnitt 3.5) bietet es sich an, nicht nur für den Ordinatenabschnitt α_i der Mikroebene, sondern auch für dortige Steigungskoeffizienten eine interindividuelle Variation zu erlauben (z. B. β_{1i} statt β_1). Im nächsten Schritt steht der Versuch an, die individuellen Steigungskoeffizienten (*Random Slopes*) eines Mikroregressors in einer Modellgleichung der Makroebene teilweise durch zeitstabile Regressoren aufzuklären, z. B.:

$$\beta_{1i} = \gamma_{10} + \gamma_{11} Z_{1_i} + U_{1i}$$

Im Erfolgsfall gelangt eine ebenenübergreifende Interaktion (*Cross Level Interaction*) ins Modell.

Für die Mikroresiduen wurden bisher der Einfachheit halber die bequemen Annahmen der Varianzhomogenität und der Unkorreliertheit verwendet, obwohl letztere bei Longitudinaldaten fraglich ist. Aus diesen Annahmen resultiert für die kombinierten Residuen ($U_{0i} + R_{it}$) eine zusammengesetzt-symmetrische Kovarianzstruktur mit der unplausiblen Behauptung, dass die Korrelationen zwischen den von einem Individuum stammenden Residuen *nicht* von der Zeitdistanz abhängen. Die Flexibilität der Mehrebenentechnologie erlaubt es, die Kovarianzstruktur der Mikroresiduen separat zu modellieren, z. B. durch einen autoregressiven Prozess erster Ordnung. Über einen zusätzlichen Varianzparameter pro Zeitpunkt kann Varianzheterogenität berücksichtigt werden.

Generalisierte lineare gemischte Modelle

Dieser Beitrag hat sich auf generelle Fragen der Modellierung von Paneldaten konzentriert und sich dabei auf intervallskalierte Kriterien und normalverteilte Residuen beschränkt. Das *generalisierte lineare gemischte Modell* (engl. Abkürzung: *GLMM*) erlaubt eine Übertragung der empfehlenswerten Analyseansätze (WB-, CRE- und RE-Modell) auf Kriterien mit zwei Kategorien, drei oder mehr geordneten Stufen oder Ereignishäufigkeiten. Allison[52] erprobt für diese

51 Siehe z. B. Raudenbush/Bryk (2002), Snijders/Bosker (2012).
52 Allison (2009).

drei Fälle jeweils das WB-Modell (unter der Bezeichnung *Hybrid-Modell*) an einem empirischen Beispiel.

Literatur

Allison, Paul D., Fixed Effects Regression Models, Los Angeles, CA 2009.

Bell, Andrew; Jones, Kelvyn, Explaining Fixed Effects. Random Effects Modeling of Time-Series Cross-Sectional and Panel Data, in: Political Science Research and Methods, Vol. 3, No. 1/2015, pp. 133–153.

Box, George E. P., Robustness in the Strategy of Scientific Model Building, in: Robustness in Statistics, ed. by Launer, Robert L.; Wilkinson, Graham N., New York, NY 1979, pp. 201–236.

Brüderl, Josef, Kausalanalyse mit Paneldaten, in: Handbuch der sozialwissenschaftlichen Datenanalyse, hrsg. von Wolf, Christof; Best, Henning, Wiesbaden 2010, S. 963–994.

Cameron, A. Colin; Trivedi, Pravin K., Microeconometrics. Methods and Applications, Cambridge 2005.

Eid, Michael; Gollwitzer, Mario; Schmitt, Manfred, Statistik und Forschungsmethoden, 3. korr. Aufl., Weinheim 2013.

Feinstein, Charles H.; Thomas, Mark, Making History Count. A Primer in Quantitative Methods for Historians, Cambridge 2002.

Fox, John, Applied Regression Analysis and Generalized Linear Models, 2nd ed., Thousand Oaks, CA 2008.

Gelman, Andrew, Why I Don't Use the Term »fixed and random effects«, 2005, online:
http://andrewgelman.com/2005/01/25/why_i_dont_use/ [29.06.2015].

Hausman, Jerry A., Specification Tests in Econometrics, in: Econometrica, Vol. 46, No. 6/1978, pp. 1251–1271.

Hedeker, Donald; Gibbons, Robert D., Longitudinal Data Analysis, Hoboken, NJ 2006

Kreft, Ita; De Leeuw, Jan, Introducing Multilevel Modeling (Introducing Statistical Methods), London 1998.

Mundlak, Yair, On the Pooling of Time Series and Cross Section Data, in: Econometrica, Vol. 46, No. 1/1978, pp. 69–85.

Petersen, Mitchell A., Estimating Standard Errors in Finance Panel Data Sets: Comparing Approaches, in: Review of Financial Studies, Vol. 22, No. 1/2009, pp. 435–480.

Raudenbush, Stephen W.; Bryk, Anthony S., Hierarchical Linear Models. Applications and Data Analysis Methods, 2nd ed., Thousand Oaks, CA 2002.

Robinson, William S., Ecological Correlations and the Behavior of Individuals, in: American Sociological Review, Vol. 15, No. 3/1950, pp. 351–357.

Snijders, Tom A. B.; Bosker, Roel L., Multilevel Analysis. An Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modeling, 2nd ed., Los Angeles, CA 2012.

Snowdon, Christopher, The Wages of Sin Taxes, (2012) online: http://www.adamsmith.org/sites/default/files/research/files/The%20Wages%20of%20Sin%20Taxes%20CJ%20Snowdon%20ASI_0.pdf [30.06.2015].

Wooldridge, Jeffrey M., Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data, 2nd ed. Cambridge, MA 2010.

Wooldridge, Jeffrey M., Introductory Econometrics. A Modern Approach, 5th ed., Mason, OH 2013.