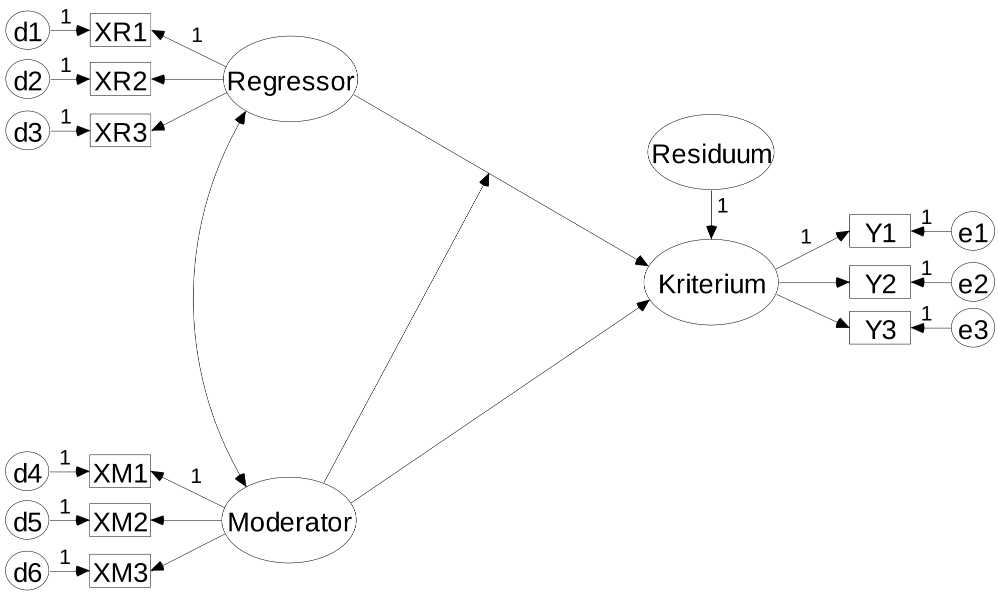
Universitäts-Rechenzentrum Trier

AWS.STAT.1

Trier, den 11.07.2008

Bernhard Baltes-Götz

Interaktionseffekte in Strukturgleichungsmodellen



Herausgeber: Universitäts-Rechenzentrum Trier
Universitätsring 15
D-54286 Trier
Tel.: (0651) 201-3417, Fax.: (0651) 3921
Leiter: Dr. Peter Leinen
Autor: Bernhard Baltes-Götz, E-Mail: baltes@uni-trier.de

Inhalt

Vorwort

In diesem Manuskript werden verschiedene Ansätze zur Modellierung von Wechselwirkungseffekten unter Beteiligung von latenten Variablen dargestellt:

- Mehrgruppenmodelle
- Manifeste Moderatoranalyse mit Faktorenwerten
- Modelle mit latenten Produktvariablen
    - Direkte Schätzung mit LISREL (Full Information Maximum Likelihood)
    - 2SLS-Schätzung nach Bollen & Paxton

Es kommen zwei SEM-Programme (**S**tructural **E**quation **M**odeling) zum Einsatz:

- Für einfache Problemstellungen wird Amos 5 eingesetzt.
- Für Modelle mit nichtlinearen Restriktionen wird LISREL 8.5 verwendet.

Für Analysen mit manifesten Variablen wird SPSS 13 verwendet.

Zur Beschreibung der Strukturgleichungsmodelle wird die LISREL-Notation verwendet.

Die aktuelle Version des Manuskripts ist als PDF-Dokument zusammen mit allen im Kurs benutzen bzw. produzierten Dateien auf dem Webserver der Universität Trier von der Startseite (http://www.uni-trier.de/) ausgehend folgendermaßen zu finden:

Rechenzentrum > Studierende > EDV-Dokumentationen >
Statistik > Interaktionseffekte in Strukturgleichungsmodellen

Hinweise auf Unzulänglichkeiten im Manuskript werden mit Dank entgegen genommen

1 Einleitung und Beispiel

Interaktionseffekte sind in der Realität verbreitet und ihre statistische Analyse hat eine lange Tradition in Modellen für *manifeste* Variablen:

- Varianzanalyse
- Regressionsanalyse mit Produkttermen (siehe z.B. Baltes-Götz 2008)

Bei der Regressionsanalyse mit Produkttermen werden allerdings Messfehler in den unabhängigen Variablen nicht berücksichtigt, so dass es zu systematisch verzerrten (in der Regel geminderten) Schätzern kommt. Um diese Fehler zu vermeiden, werden seit etlichen Jahren Strukturgleichungsmodelle mit Interaktionseffekten vorgeschlagen.

Wir betrachten in diesem Manuskript eine simulierte Population, in der zwei latente exogene Variablen ξ_1 und ξ_2 in Bezug auf eine latente abhängige Variable η interagieren:

$$\begin{aligned}\eta &= \alpha + \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_1\xi_2 + \zeta \\ &= \underbrace{(\alpha + \gamma_2\xi_2)}_{\alpha^*} + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_3\xi_2)}_{\gamma^*}\xi_1 + \zeta\end{aligned}$$

Für feste Werte des Moderators ξ_2 wird ein linearer Effekt des Regressors ξ_1 auf das Kriterium angenommen, wobei die Koeffizienten α^* und γ^* der bedingten Regression wiederum linear vom Moderator abhängen:

$$\alpha^*(\xi_2) = \alpha + \gamma_2\xi_2$$

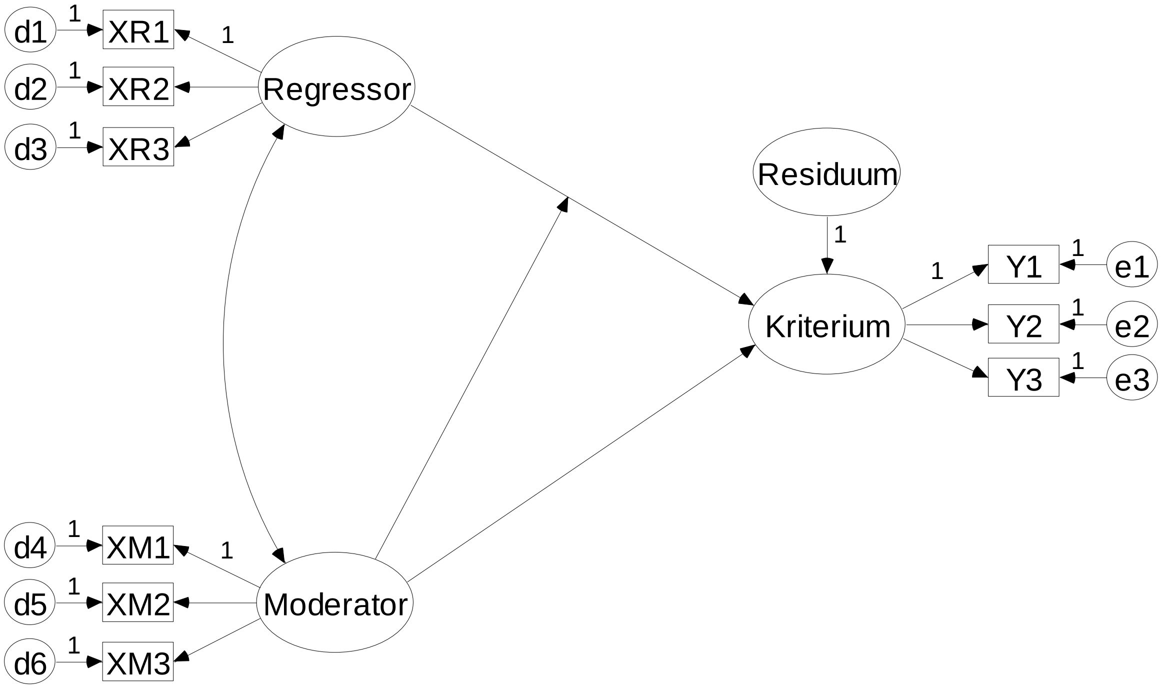
$$\gamma^*(\xi_2) = \gamma_1 + \gamma_3\xi_2$$

Für die latenten Variablen η, ξ_1 und ξ_2 in obigem Strukturmodell stehen jeweils drei manifeste Indikatoren im Sinne der folgenden Messmodelle zur Verfügung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^x \\ \tau_2^x \\ \tau_3^x \\ \tau_4^x \\ \tau_5^x \\ \tau_6^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2^x & 0 \\ \lambda_3^x & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_5^x \\ 0 & \lambda_6^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^y \\ \tau_2^y \\ \tau_3^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2^y \\ \lambda_3^y \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Insgesamt kann man die Verhältnisse in der simulierten Population durch folgendes Pfadmodell beschreiben:



Es müssen Erwartungswerte und Ordinatenabschnitte einbezogen werden, weil der Erwartungswert einer Produktvariablen nur bei Unabhängigkeit mit dem Produkt der Faktor-Erwartungswerte übereinstimmt. Somit ist er im Allgemeinen auch dann von Null verschieden, wenn die Erwartungswerte der Faktoren verschwinden.
LISREL bietet für solche Modelle vier zusätzliche Parametermatrizen:

- Κ (*Kappa*) mit den Erwartungswerten der exogenen latenten Variablen
- T_{X} (*Tau X*) mit den Ordinatenabschnitten im Messmodell für die exogenen manifesten Variablen.
- T_{Y} (*Tau Y*) mit den Ordinatenabschnitten im Messmodell für die endogenen manifesten Variablen.
- Α (*Alpha*) mit den Ordinatenabschnitten im Strukturmodell

In der SPSS-Syntaxdatei **mc.sps**, zu finden an der im Vorwort genannten Stelle, wird aus einer Population von der beschriebenen Struktur eine Zufallsstichprobe der Größe *N* = 384 gezogen. Wer am Datengenerator nicht interessiert ist, findet die Stichprobendaten in der SPSS-Datendatei **mc.sav**.
Das wahre Strukturmodell der künstlichen Population lautet:

$$\eta = 0{,}5 + 1{,}0\,\xi_1 + 0{,}5\,\xi_2 + 1{,}0\,\xi_1\xi_2 + \zeta$$

2 Analysemethoden im Überblick

Es sind zahlreiche Vorschläge entwickelt worden, Interaktionseffekte auf der Ebenen latenter Variablen zu untersuchen, und die Methodenentwicklung ist weiter in vollem Gang (siehe z.B. Schumacker & Marcoulides 1998).

Derzeit sind vor allem die beiden folgenden Ansätze zu beachten:

- **Mehrgruppenmodelle**
  Vor allem bei kategorialen Moderatoren lassen sich Interaktionshypothesen durch geeignete Parameterrestriktionen in Mehrgruppenmodellen untersuchen (siehe Abschnitt 3).

  Vorteile:
  - einfach mit den meisten SEM-Programmen zu realisieren
    Die überwiegend einheitliche Durchführung garantiert eine unproblematische Kommunikation von Forschungsergebnissen.
  - breiter Anwendungsbereich
    Man ist nicht auf spezielle Interaktionsmuster (z.B. die *lineare* Moderation) beschränkt. Außerdem können neben der Moderation von Regressions- bzw. Strukturkoeffizienten auch Gruppenunterschiede bei anderen Verteilungsaspekten (z.B. Korrelationen) untersucht werden.

  Nachteile:
  - Der Moderator muss perfekt beobachtbar sein.
  - Stetige Moderatoren müssen künstlich kategorisiert werden.
  - Weil in jeder Teilstichprobe die Minimalgröße für eine Strukturgleichungsanalyse (mit ihrer approximativ gültigen statistischen Theorie) zu fordern ist, werden relativ große Stichproben benötigt.

- **Modelle mit latenten Produktvariablen**
  Initiiert durch eine Arbeit von Kenny & Judd (1984) sind etliche Vorschläge entwickelt worden, latente Interaktionskonstrukte in Strukturgleichungsmodelle zu integrieren (siehe Abschnitt 5).
  Vorteile:
  - Es muss kein stetiger Moderator künstlich kategorisiert werden.

  Nachteile:
  - Es existieren zahlreiche konkurrierende Ansätze, was für eine produktive Methodenentwicklung spricht, in der angewandten Forschung aber zu Kommunikationsproblemen führen kann.
  - Viele Ansätze benötigen SEM-Software mit der Option zur Formulierung nichtlinearer Restriktionen. Diese besteht z.B. in LISREL 8, nicht aber in Amos 5.
  - Die in Strukturgleichungsmodellen mit latenten Variablen übliche Voraussetzung der multivariaten Normalverteilung der manifesten Variablen kann bei Anwesenheit von Interaktionseffekten nicht erfüllt sein. Ein Umstieg auf asymptotisch verteilungsfreie Schätzverfahren ist nur bei sehr großen Stichproben ratsam.

  Hier ist auch eine relative junge Technik von Bollen & Paxton (1998) einzuordnen, die über eine 2SLS-Analyse zu recht präzisen Schätzungen des Regressionsgewichtes für die latente Produktvariable gelangt (siehe Abschnitt 5.2).

Beim Vergleich der verschiedenen Ansätze kommen Rigdon et al. (1998, S. 2) zum Resümee:

> *A careful review suggests that the multisample approach is still the most useful procedure for modelling latent variable interaction effects, under the widest set of circumstances, whereas the indicant product approach should be reserved for particular situations where it will yield superior results.*

Jöreskog (1998, S. 248) kommt zu folgender Empfehlung für die Forschungspraxis:

- Falls ein beobachtbarer Moderator vorliegt, sollte die einfach und flexibel anwendbare Mehrgruppentechnik verwendet werden.
- Liegt ein latenter Moderator vor, sollte man zunächst mit geschätzten Faktorwerten oder aber mit der 2SLS-Technik von Bollen & Paxton arbeiten.
- An eine Full-Information – Analyse soll man sich nur wagen, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
    - eine sehr große Stichprobe
    - die Befähigung zur Formulierung der vom Modell implizierten nonlinearen Restriktionen

3 Mehrgruppenmodelle

Bei der Gruppenvergleichstechnik definiert man mehrere Gruppen aufgrund der Ausprägungen von (e-ventuell mehreren) Moderatorvariablen.
In der Interaktionshypothese wird die Unterschiedlichkeit von Verteilungsparametern in verschiedenen Gruppen behauptet. Ein Test erfolgt durch Vergleich der χ^2–Anpassungsstatistiken für geschachtelte Modelle (vgl. Jaccard & Wan 1996, S. 23ff):

- Das uneingeschränkte Modell erlaubt für jede Gruppe eine individuelle Schätzung der mutmaßlich moderierten Parameter.
  Es muss als gültig akzeptiert sein, damit die Interaktionshypothese über einen Vergleich mit dem eingeschränkten Modell, das zusätzliche Restriktionen enthält, geprüft werden kann.
- Das eingeschränkte Modell enthält Gleichheitsrestriktionen für die mutmaßlich moderierten Parameter, d.h.
  - Im Vergleich zum uneingeschränkten Modell sind *d* zusätzliche Freiheitsgrade vorhanden:
    $$d = \mathrm{df}_e - \mathrm{df}_u$$
  - Die χ^2-Prüfgröße des Modellgültigkeitstests steigt im Allgemeinen an.
  - Bei gültiger Interaktions-Nullhypothese (keine Wechselwirkung) ist die Differenz
    $$\chi_e^2 - \chi_u^2$$
    der beiden Prüfgrößen χ^2-verteilt mit *d* Freiheitsgraden so dass eine Überschreitungswahrscheinlichkeit berechnet und ein Test durchgeführt werden kann.

Wir betrachten die Daten aus dem in Abschnitt 1 vorgestellten Beispiel, gehen dabei von einem manifesten Moderator aus, der zudem künstlich kategorisiert werden muss. Oft wird eine Median-Dichotomisierung vorgenommen. Nach Möglichkeit sollte man sich an inhaltlich begründeten Werten orientieren. Unter der Annahme, dass sich negative Moderatorwerte von positiven inhaltlich relevant unterscheiden, wählen wir im Beispiel eine Dichotomisierung beim Wert 0.

Bei der Analyse von Mehrgruppenmodellen mit **Amos 5** (vgl. Arbuckle 2003, Arbuckle & Wothke 1999) werden die Daten jeder Gruppe in einer eigenen Datei erwartet. In unserem Beispiel kommen die SPSS-Dateien **mc_g1.sav** und **mc_g2.sav** zum Einsatz, die Sie an der im Vorwort genannten Stelle finden

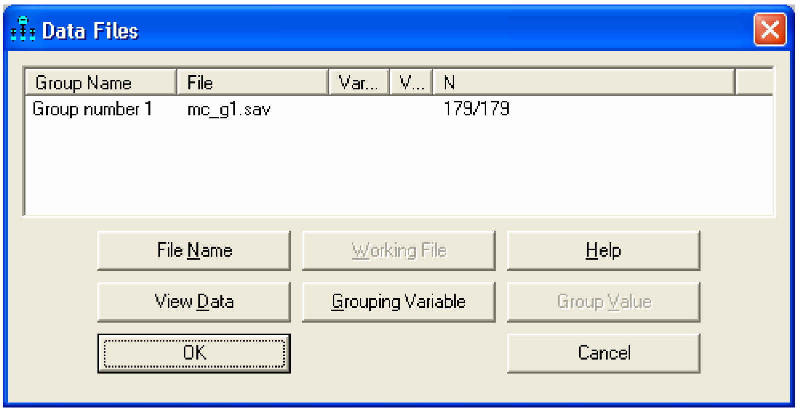
Weiterhin gelten folgende Regeln:

- Per Voreinstellung sind die Pfaddiagramme der einzelnen Gruppen identisch. Wenn es dabei bleibt, muss also nur *ein* Pfaddiagramm gezeichnet werden.
- Für unbenannte Parameter schätzt Amos in jeder Gruppe einen eigenen Wert.
  Die beiden ersten Regeln kann man also so zusammenfassen: Per Voreinstellung besitzen die Gruppen eine identische Modellstruktur, aber individuelle Parameterwerte.
- Parameter aus verschiedenen Gruppen können durch identische Benennung identisch gesetzt werden. Derartige Restriktionen erlauben eine flexible Formulierung von Interaktionshypothesen.

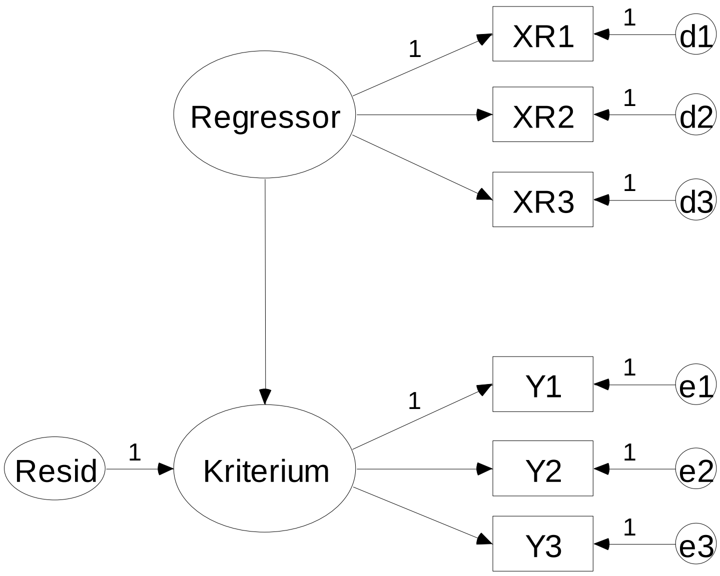
Öffnen Sie in einem neuen Amos-Projekt über

File > Data Files > File Name

die Datei der ersten Gruppe (niedrige Moderatorwerte):



Erstellen Sie das folgende Pfaddiagramm (zur Amos-Bedienung siehe z.B. Baltes-Götz 2008):

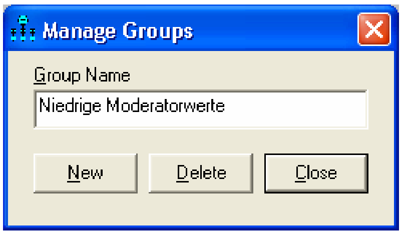


In der Diagrammbeschriftung (zu erstellen mit dem Title-Werkzeug) sorgt der Makro-Eintrag **\group** dafür, dass die aktuell dargestellte Gruppe stets erkennbar ist:

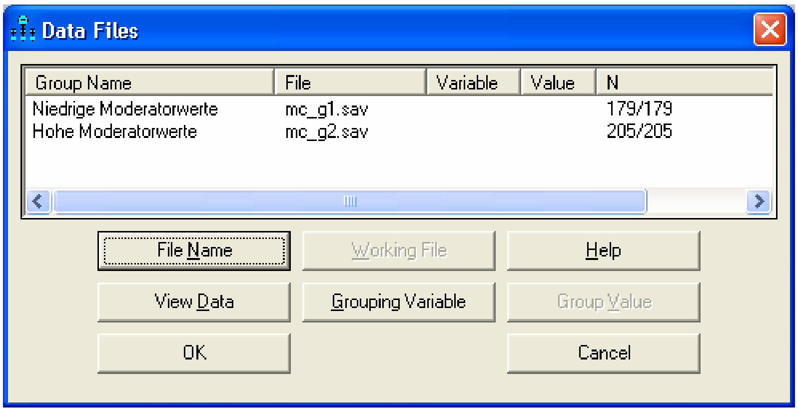
Nun nehmen wir die zweite Gruppe in die Analyse auf und vereinbaren außerdem für beide Gruppen eine informative Bezeichnung vereinbaren. Dazu starten wir den **Gruppenmanager** mit

Model-Fit > Manage Groups

Zunächst ersetzen wir die automatisch vergebene Gruppenbezeichnung **Group number 1** durch **Niedrige Moderatorwerte**:



Dann legen wir mit **New** eine neue Gruppe an, benennen diese gleich passend und schließen die Dialogbox **Manage Groups** mit **Close**.
Schließlich muss über **File > Data Files** noch die Eingabedatei zur zweiten Gruppe vereinbart werden:



Nach unseren bisherigen Modellspezifikationen kann Amos alle Parameter in jeder Gruppe separat schätzen, insbesondere den vornehmlich interessierenden Effekt des Regressors auf das Kriterium.
Lassen Sie mit

oder **Model-Fit > Calculate Estimates**

die Modellparameter mit der voreingestellten Maximum Likelihood - Methode schätzen. Falls bislang noch keine Projektdatei angelegt worden ist, fordert Amos nun dazu auf.

Wie die Amos-Textausgabe (zu öffnen mit oder **View/Set > Text Output**) zeigt, kann das uneingeschränkte Modell als gültig akzeptiert werden:

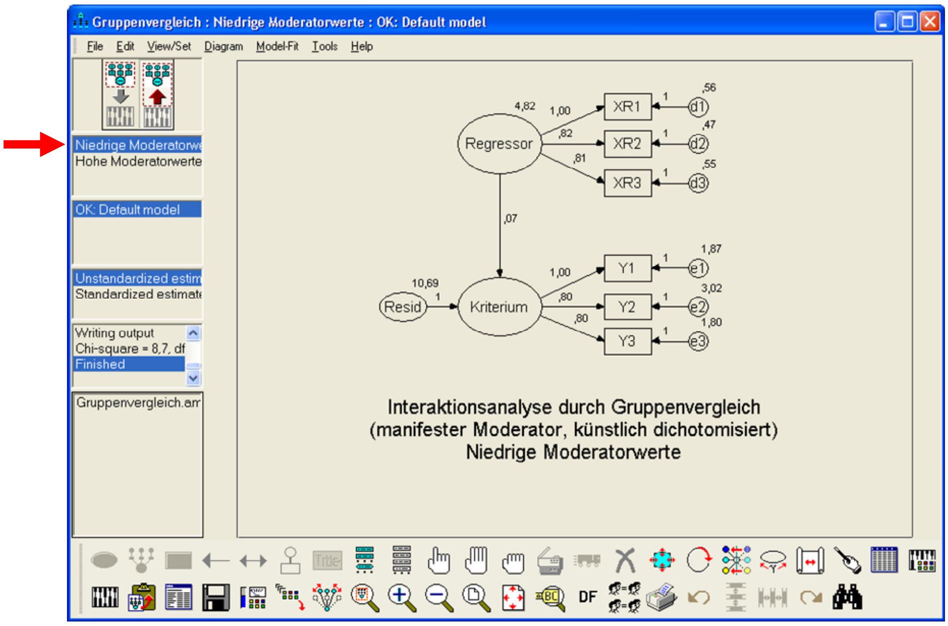
Computation of degrees of freedom (Default model)

Number of distinct sample moments:	42
Number of distinct parameters to be estimated:	26
Degrees of freedom (42 - 26):	16

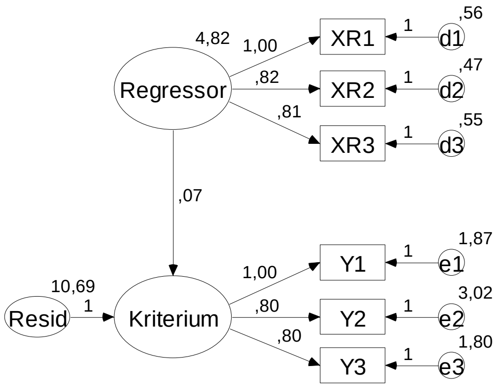
Result (Default model)

Minimum was achieved
Chi-square = 8,717
Degrees of freedom = 16
Probability level = ,925

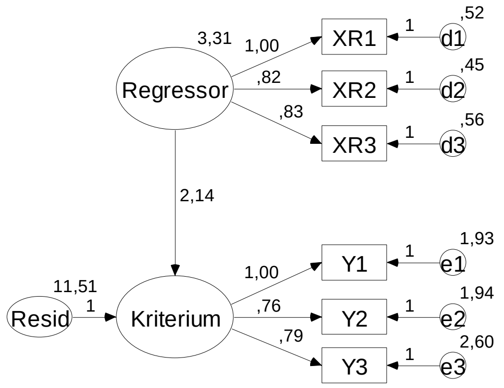
Das Ausgabe-Pfaddiagramm zeigt jeweils die Schätzergebnisse der im Gruppen-Auswahlbereich am linken Rand des Amos-Fensters markierten Gruppe, z.B.:



Ein Vergleich der beiden Pfaddiagramme mit Parameterschätzungen spricht deutlich für die Interaktionshypothese:



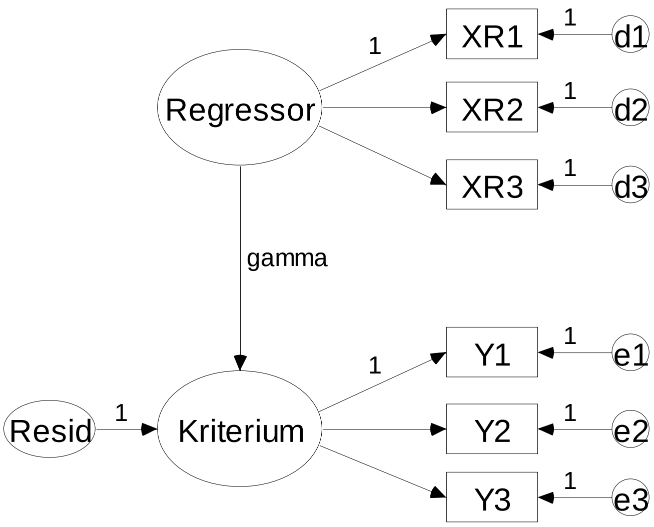
Interaktionsanalyse durch Gruppenvergleich
(manifester Moderator, künstlich dichotomisiert)
Niedrige Moderatorwerte



Interaktionsanalyse durch Gruppenvergleich
(Moderator künstlich dichotomisiert)
Hohe Moderatorwerte

Es kann sinnvoll sein, das uneingeschränkte Modell durch plausible Gleichheitsrestriktionen zwischen den Gruppen statistisch effizienter zu machen. Im Beispiel spricht nichts gegen die Annahme identischer Messmodelle für beide Gruppen. Wir verzichten aber der Einfachheit halber auf diese Optimierung.

Nun wird das eingeschränkte Modell mit identischen Regressionskoeffizienten für beide Gruppen untersucht. Dazu geben wir dem betroffenen Parameter in beiden Gruppen denselben Namen, z.B.:



Das eingeschränkte Modell wird eindeutig verworfen:

Computation of degrees of freedom (Default model)

Number of distinct sample moments:	42
Number of distinct parameters to be estimated:	25
Degrees of freedom (42 - 26):	17

Result (Default model)

Minimum was achieved
Chi-square = 109,984
Degrees of freedom = 17
Probability level = ,000

Somit ist die Beurteilung der Interaktionshypothese über die χ^2-Differenz eine reine Pflichtübung:

$$d = \mathrm{df}_u - \mathrm{df}_e = 17 - 16 = 1$$
$$\chi^2_d = \chi^2_e - \chi^2_u = 109{,}984 - 8{,}717 = 101{,}267$$

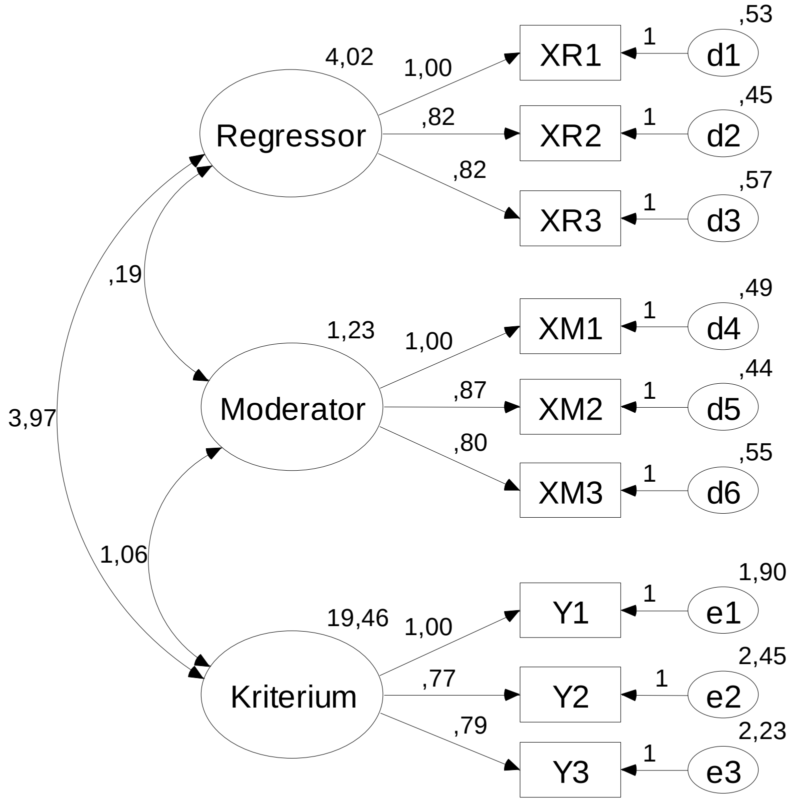
Die Überschreitungswahrscheinlichkeit für $\chi^2_d = 101{,}267$ bei $d = 1$ ist praktisch 0, so dass die Interaktions-Nullhypothese deutlich verworfen wird.

4 Manifeste Moderatoranalyse mit Faktorenwerten

Jonsson (1998, S. 23ff) demonstriert unter der Abschnittsüberschrift *Preliminary Analysis* ein Zweischrittverfahren, das Jöreskog (1998) für so vollwertig hält, dass es in LISREL nun direkt unterstützt wird (siehe *Latent Variable Scores*):

Schritt 1

Im ersten Schritt gewinnt man geschätzte Faktorwerte aus einem reinen Messmodell mit freien Kovarianzen zwischen den latenten Variablen:



Sofern eine Interaktion im Sinn von Abschnitt 1 vorliegt, ist in diesem Modell allerdings keine multivariate Normalverteilung der manifesten Variablen gegeben (siehe z.B. Jöreskog 1998, S. 245). Folglich ist der auf Maximum Likelihood - Schätzungen basierende χ^2-Modellgültigkeitstest mit Vorsicht zu genießen. Amos 5 berechnet für unsere (ungeteilte) Stichprobe:

Result (Default model)

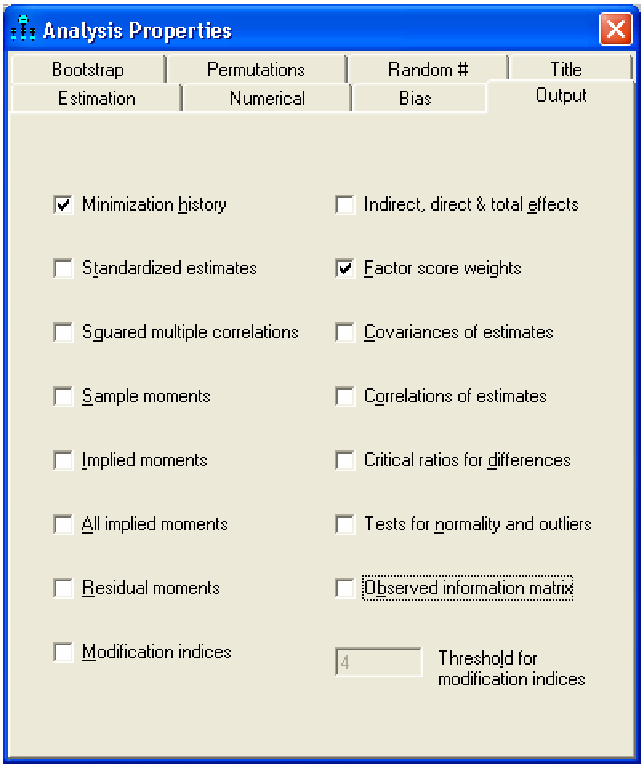
Minimum was achieved
Chi-square = 20,920
Degrees of freedom = 24
Probability level = ,643

Hinsichtlich der Parameterschätzungen kann man jedoch auf die Robustheit der ML-Methodik vertrauen. Die Verwendung asymptotisch verteilungsfreier Schätzer ist kaum empfehlenswert, weil diese Verfahren sehr große Stichproben benötigen, die speziell bei sozialwissenschaftlichen Studien kaum anzutreffen sind.

Im Amos 5 fordert man die Ausgabe von Koeffizienten zur Berechnung von Faktorwerten nach

View/Set > Analysis Properties

in der folgenden Dialogbox an:



Im Beispiel erhalten wir im Amos-Textfenster die folgende Koeffizientenmatrix:

Factor Score Weights (Group number 1 - Default model)

	Y3	Y2	Y1	XM3	XM2	XM1	XR3	XR2	XR1
Kriterium	,319	,282	,471	,011	,015	,015	,017	,022	,022
Moderator	,003	,002	,004	,253	,343	,352	,000	,000	,000
Regressor	,004	,004	,006	,000	,000	,000	,295	,376	,387

Aus diesen Koeffizienten gewinnt man die geschätzten Faktorwerte z.B. mit den folgenden SPSS-Transformationskommandos:

```
compute fsKrit = 0.319*Y3 + 0.282*Y2 + 0.471*Y1 + 0.011*XM3 + 0.015*XM2 + 0.015*XM1 +
                 0.017*XR3 + 0.022*XR2 + 0.022*XR1.
compute fsMod  = 0.003*Y3 + 0.002*Y2 + 0.004*Y1 + 0.253*XM3 + 0.343*XM2 + 0.352*XM1 +
                 0.000*XR3 + 0.000*XR2 + 0.000*XR1.
compute fsReg  = 0.004*Y3 + 0.004*Y2 + 0.006*Y1 + 0.000*XM3 + 0.000*XM2 + 0.000*XM1 +
                 0.295*XR3 + 0.376*XR2 + 0.387*XR1.
```

Diese Kommandos sind in der bereits erwähnten SPSS-Syntaxdatei **mc.sps** enthalten, welche an der im Vorwort genannten Stelle zu finden ist.

Schritt 2

Im zweiten Schritt berechnet man unter Verwendung der geschätzten Faktorwerte eine Moderator-Regressionsanalyse für manifeste Variablen (vgl. z.B. Baltes-Götz 2008), d.h.:

- Man sollte die Faktorwerte zu den latenten exogenen Variablen zentrieren, um Kollinearitätsproblemen aus dem Weg zu gehen und die Interpretation der „Haupteffekte“ zu erleichtern:
  ```
  compute fsMod = fsMod - 0.9937445180482.
  compute fsReg = fsReg - 0.9370755073246.
  ```
  Beim Kriterium ist das Zentrieren nicht erforderlich.
- Man berechnet die Produktvariable aus den Regressions- und den Moderator-Faktorwerten.
- Man rechnet eine multiple lineare Regressionsanalyse mit der Produktvariablen als zusätzlichem Regressor.

Im Beispiel resultieren (abgesehen vom irrelevanten Ordinatenabschnitt) recht präzise Schätzungen für die Parameter des latenten Strukturmodells:

Koeffizienten[a]

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		Standardisierte Koeffizienten			95%-Konfidenzintervall für B	
		B	Standardfehler	Beta	T	Signifikanz	Untergrenze	Obergrenze
1	(Konstante)	1,411	,161		8,746	,000	1,094	1,728
	fsReg	1,163	,084	,528	13,900	,000	,999	1,328
	fsMod	,655	,157	,157	4,164	,000	,346	,964
	fsRegMod	,977	,079	,468	12,366	,000	,822	1,133

a. Abhängige Variable: fsKrit

Auch der Determinationskoeffizient für das Strukturmodell wird sehr realistisch eingeschätzt:

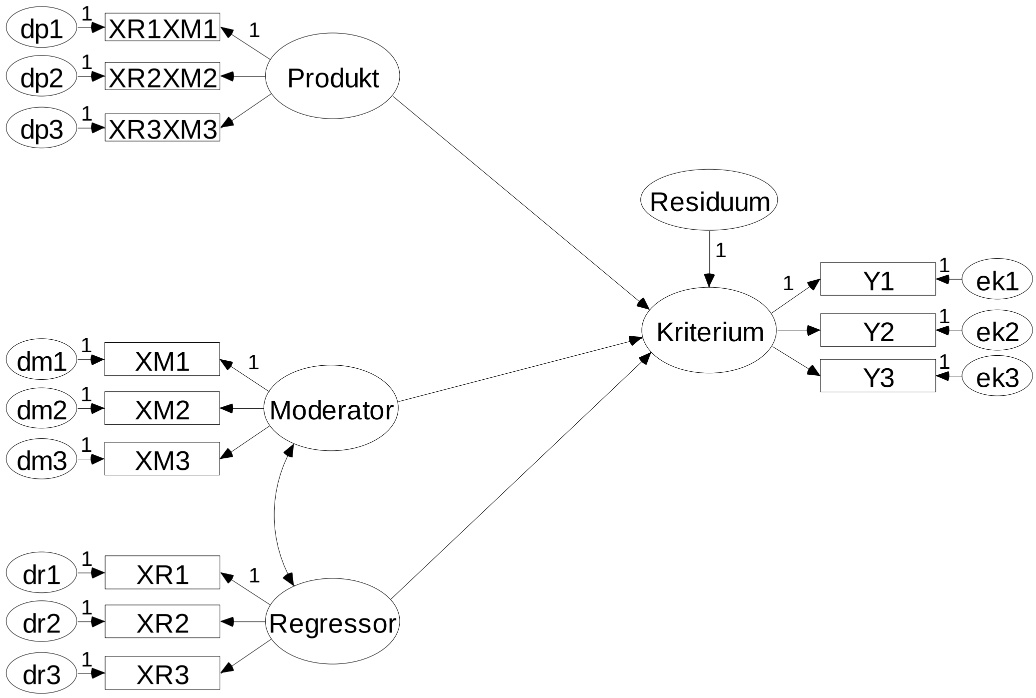
Modellzusammenfassung

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,687[a]	,472	,468	3,14756

a. Einflußvariablen : (Konstante), fsRegMod, fsMod, fsReg

5 Modelle mit latenten Produktvariablen

Initiiert durch eine Arbeit von Kenny & Judd (1984) sind etliche Vorschläge entwickelt worden, latente Produktvariablen in Strukturgleichungsmodelle zu integrieren. Das im Modell von Abschnitt 1 enthaltene Produkt $\xi_1\xi_2$ wird hier als latente Variable behandelt:



Jöreskog und Yang (1996) konnten zeigen, dass zur Identifikation eines Modells mit der latenten Produktvariablen $\xi_1\xi_2$ mindestens *eine* manifeste Produktvariable erforderlich ist (z.B. x_1x_4 in der Notation von Abschnitt 1 bzw. XR1 * XM2 unter Verwendung der Variablennamen).

5.1 Direkte Schätzung mit LISREL (Full Information Maximum Likelihood)

Die verschiedenen Vorschläge für Modelle mit latenten Produktvariablen unterscheiden sich u.a. hinsichtlich der Anzahl der einbezogenen manifesten Produktvariablen. Während Kenny & Judd (1984) *alle* durch Kombination der Regressions- und der Moderator-Indikatoren möglichen Produkte als Indikatoren der latenten Produktvariablen einbezogen haben, empfehlen z.B. Jöreskog & Yang (1996) die Beschränkung auf *einen* Produktindikator. Als Vorteile der sparsamen Strategie sind zu nennen:

- Eine geringere Indikatorenzahl erleichtert generell die Modellschätzung.
- Es sind weniger manifeste Variablen mit problematischer, nichtnormaler Verteilung im Modell.

Ein zentrales Problem der Produktvariablen-Strategie besteht darin, dass die bei Strukturgleichungsanalysen dominierenden **Maximum Likelihood – Schätzungen** und die darauf basierenden Signifikanztests eine **multivariate Normalverteilung der manifesten Variablen** voraussetzen. Diese Voraussetzung ist bei den betrachteten Modellen aber verletzt, weil das Produkt aus zwei normalverteilten Variablen i.A. *nicht* normalverteilt ist.
Simulationsstudien zeigen zwar, dass die ML-Schätzungen relativ robust gegenüber Verletzungen der Normalverteilungsannahme sind, jedoch ist bei den geschätzten Standardfehlern (und damit bei den Signifikanztests) mit nennenswerten Fehlern zu rechnen (Jöreskog 1998, S. 248).

Die Verwendung asymptotisch verteilungsfreier Schätzer ist kaum eine Lösung, weil diese Verfahren sehr große Stichproben benötigen, die speziell bei sozialwissenschaftlichen Studien kaum anzutreffen sind.

Produktvariablen machen weiterhin Probleme, weil ihre Verteilungsparameter in komplexer Weise von den Verteilungsparametern der Faktoren abhängen. Im Schätzalgorithmus müssen nichtlineare Restriktionen berücksichtigt werden, weil anderenfalls ungültige Schätzungen im Widerspruch zu mathematischen Gesetzen resultieren. So gilt z.B. für die Varianz der latenten Produktvariablen $\xi_1\xi_2$ (vgl. Anderson 1984):

$$\mathrm{Var}(\xi_1\xi_2) = \mathrm{Var}(\xi_1) \cdot \mathrm{Var}(\xi_2) + \mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2)^2$$

Weil Amos 5 nichtlineare Restriktionen nicht unterstützt, wird die FIML-Lösung (Full Information Maximum Likelihood) mit LISREL 8.5 geschätzt, wobei das von Jaccard & Wan (1998, S. 55ff) in Anlehnung an Jöreskog & Yang (1996) vorgeschlagene Vorgehen übernommen wird.

Die Datei **mc.ls8**, zu finden an der im Vorwort vereinbarten Stelle, enthält ein LISREL8-Programm mit der anschließend beschriebenen Modellspezifikation. Es liest die Kovarianzmatrix der sieben manifesten Variablen aus der Datei **cov.txt** und den zugehörigen Mittelwertsvektor aus der Datei **mean.txt**.

Im Vergleich zum Modell in Abschnitt 1 sind einige Erweiterungen bzw. Spezialisierungen vorzunehmen:

$$\eta = \alpha + \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_1\xi_2 + \zeta$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_1x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^x \\ \tau_2^x \\ \tau_3^x \\ \tau_4^x \\ \tau_5^x \\ \tau_6^x \\ \tau_1^x\tau_4^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2^x & 0 & 0 \\ \lambda_3^x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_5^x & 0 \\ 0 & \lambda_6^x & 0 \\ \tau_4^x & \tau_1^x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_1\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{pmatrix}$$

$$\delta_7 = \tau_1^x\delta_4 + \xi_1\delta_4 + \delta_1\delta_4 + \tau_4^x\delta_1 + \delta_1\xi_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^y \\ \tau_2^y \\ \tau_3^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2^y \\ \lambda_3^y \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Es folgen einige nicht ganz triviale Erläuterungen zur Modellspezifikation und zu den implizierten Restriktionen:

- In den obigen Modellgleichungen sind die Darstellung für den Fehler δ_7, der Ordinatenabschnitt zu x_1x_4 und die etwas verblüffenden „Ladungen“ von x_1x_4 auf ξ_1 bzw. ξ_2 folgendermaßen zu erklären:

$$\begin{aligned} x_1x_4 &= (\tau_1^x + \xi_1 + \delta_1)(\tau_4^x + \xi_2 + \delta_4) \\ &= \tau_1^x\tau_4^x + \tau_1^x\xi_2 + \tau_4^x\xi_1 + \xi_1\xi_2 + (\tau_1^x\delta_4 + \tau_4^x\delta_1 + \xi_1\delta_4 + \xi_2\delta_1 + \delta_1\delta_4) \end{aligned}$$

- Für den Fehler δ_7 zur manifesten Produktvariablen haben wir gerade den folgenden Ausdruck berechnet:

$$\delta_7 = \tau_1^x\delta_4 + \tau_4^x\delta_1 + \xi_1\delta_4 + \xi_2\delta_1 + \delta_1\delta_4$$

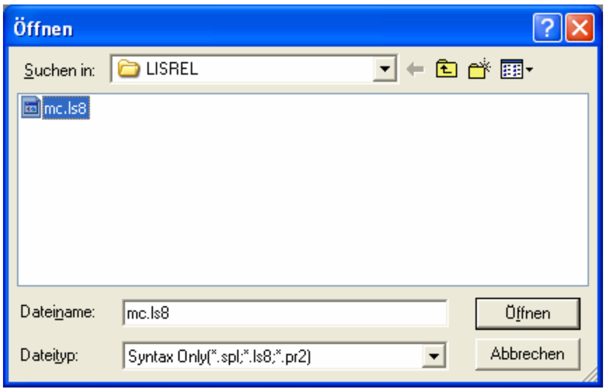
Damit folgt für Var(δ_7) nach generellen Rechenregeln für Varianzen (siehe z.B. Hayes 1981, S. 625ff), nach der obigen Regel für die Varianz von Produktvariablen und aus den Unabhängigkeitsvoraussetzungen für die Residualvariablen:

$$\mathrm{Var}(\delta_7) = (\tau_1^x)^2\,\mathrm{Var}(\delta_4) + (\tau_4^x)^2\,\mathrm{Var}(\delta_1) + \mathrm{Var}(\xi_1)\,\mathrm{Var}(\delta_4) + \mathrm{Var}(\xi_2)\,\mathrm{Var}(\delta_1) + \mathrm{Var}(\delta_1)\,\mathrm{Var}(\delta_4)$$

- Für die Kovarianz der Fehler zu x_1 bzw. x_4 mit dem Fehler der Produktvariablen x_1x_4 folgt aus obiger δ_7–Darstellung und den bereits zitierten Regeln:
$$\mathrm{Cov}(\delta_1, \delta_7) = \tau_4^x\,\mathrm{Var}(\delta_1) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Cov}(\delta_4, \delta_7) = \tau_1^x\,\mathrm{Var}(\delta_4)$$
- Die (ohnehin willkürlichen) Erwartungswerte der latenten Variablen ξ_1 und ξ_2 werden gleich 0 gesetzt. Dies vereinfacht die Modellierung, und außerdem wären die Erwartungswerte nicht gemeinsam mit den Ordinatenabschnitten τ_i^x identifiziert.
- Weil die Erwartungswerte von ξ_1 und ξ_2 verschwinden, folgt mit der generell gültigen Verschiebungsformel für die Kovarianz:
$$\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{E}(\xi_1\xi_2) - \mathrm{E}(\xi_1)\,\mathrm{E}(\xi_2) = \mathrm{E}(\xi_1\xi_2)$$
Folglich muss E($\xi_1\xi_2$) auf Cov(ξ_1, ξ_2) fixiert werden.
- Für zentrierte und bivariat normalverteilte Variablen ξ_1 und ξ_2 folgt eine weitere Modellrestriktion:
$$\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_1\xi_2) = \mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_1\xi_2) = 0$$
- Weil der Parameter α (das einzige Element der Matrix **A** in unserem Modell) und die Parameter τ_i^y nicht gemeinsam identifiziert sind, wird α auf 0 fixiert.

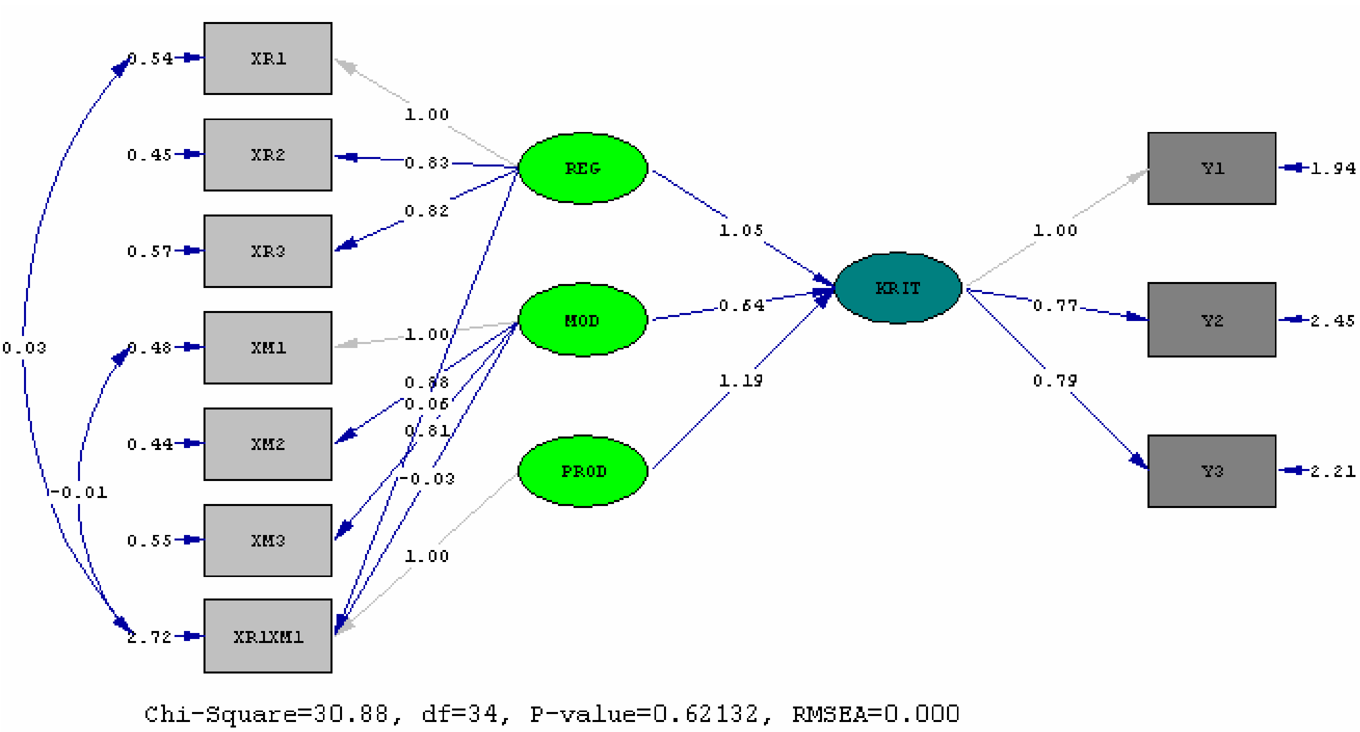
Gehen Sie in LISREL 8 folgendermaßen vor, um das Modell schätzen und beurteilen zu lassen:

- Menübefehl **File > Open** oder Symbol 
- Syntax-Datei **mc.ls8** öffnen:



- Menübefehl **File > Run LISREL** oder Symbol 

Wir erhalten folgendes Pfaddiagramm:



Weil die Parameterschätzung nach dem ML-Prinzip erfolgt, obwohl für die manifesten Variablen keine multivariate Normalverteilung gilt, sind insbesondere die Signifikanztests (zu den Parametern und zur Modellgültigkeit) mit Vorsicht zu genießen.

Die von LISREL 8 berechneten ML-Parameterschätzungen liegen sehr nahe an den wahren Werten in der künstlichen Population:

LAMBDA-Y

	KRIT
Y1	1.00
Y2	0.77
Y3	0.79

LAMBDA-X

	REG	MOD	PROD
XR1	1.00	- -	- -
XR2	0.83	- -	- -
XR3	0.82	- -	- -
XM1	- -	1.00	- -
XM2	- -	0.88	- -
XM3	- -	0.81	- -
XR1XM1	0.06	-0.03	1.00

GAMMA

	REG	MOD	PROD
KRIT	1.05	0.64	**1.19**

Die aus Platzgründen weggelassenen Standardfehler und T-Werte sprechen für die Signifikanz der relevanten Parameter. Insbesondere wird der Strukturkoeffizient zum Produktterm über einen T-Wert von 9,23 als signifikant beurteilt.
Auch der Determinationskoeffizient zum Strukturmodell gibt die Verhältnisse in der konstruierten Population gut wieder:

```
          Squared Multiple Correlations for Structural Equations

                 KRIT
             --------
                 0.56
```

Trotz aller Vorbehalte werfen wir auch noch einen Blick auf den sehr freundlich ausgefallenen χ^2-Modellgültigkeitstest:

```
                              Goodness of Fit Statistics
                                Degrees of Freedom = 34
                 Minimum Fit Function Chi-Square = 30.52 (P = 0.64)
         Normal Theory Weighted Least Squares Chi-Square = 30.88 (P = 0.62)
```

5.2 2SLS-Schätzung nach Bollen & Paxton

Bollen & Paxton (1998) schlagen eine Methode zur Schätzung von Interaktionseffekten auf der Ebene latenter Variablen vor, die sich erstaunlicherweise mit üblichen Statistikpaketen für manifeste Variablen realisieren lässt, also kein SEM-Programm benötigt.

Sie gehen von folgendem Strukturmodell aus, betrachten also (wie Kenny & Judd 1984) auf der *abhängigen* Seite eine *manifeste* Variable:

$$y = \alpha + \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_1\xi_2 + \zeta$$

Das begleitende Messmodell:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_2^x \\ 0 \\ \tau_4^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2^x & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_4^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

Die latente Variable ξ_1 wird also so in der Beobachtungsbasis verankert, dass sie denselben Ursprung und dieselbe Metrik hat wie x_1.[1] Analog wird ξ_2 unter Bezug auf x_3 verankert.

Mit

$$x_1 = \xi_1 + \delta_1 \Leftrightarrow \xi_1 = x_1 - \delta_1$$
$$x_3 = \xi_2 + \delta_3 \Leftrightarrow \xi_2 = x_3 - \delta_3$$

kann man im Strukturmodell die latenten exogenen Variablen ersetzen:

$$\begin{aligned} y &= \alpha + \gamma_1(x_1 - \delta_1) + \gamma_2(x_3 - \delta_3) + \gamma_3(x_1 - \delta_1)(x_3 - \delta_3) + \zeta \\ &= \alpha + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_3 + \gamma_3 x_1 x_3 + \tilde{\zeta} \end{aligned}$$

Für die neue Residualvariable gilt:

$$\tilde{\zeta} = -\gamma_1\delta_1 - \gamma_2\delta_3 + \gamma_3(-x_1\delta_3 - x_3\delta_1 + \delta_1\delta_3) + \zeta$$

Man hat zwar nun eine Regressionsgleichung mit manifesten Variablen und den Parametern aus dem Strukturmodell für die latenten Variablen, allerdings ist die neue Residualvariable mit den Regressoren korreliert, so dass keine OLS-Schätzung (*Ordinary Least Squares*) möglich ist.

[1] Bollen & Paxton (1998) wählen also einen anderen Weg als Jöreskog & Yang (1996), um die Erwartungswerte zu ξ_1 und ξ_2 zu identifizieren (vgl. Abschnitt 5.1).

In dieser Situation kann eine 2SLS-Analyse durchgeführt werden, wenn mindestens 3 instrumentelle Variablen gefunden werden, die …

- in einer Regressionsgleichung zu jedem der Regressoren x_1, x_3 und x_1x_3 mindestens 10 % Varianz aufklären,
- von $\tilde{\zeta}$ unabhängig sind.

Die alternativen Indikatoren x_2, x_4 und x_2x_4 erfüllen alle Voraussetzungen.

Behandelt man bei unserer Simulationsstudie, realisiert durch die SPSS-Syntaxdatei **mc.sps**, das Kriterium als *manifest*, resultiert ein Modell mit der von Bollen & Paxton (1998) angenommenen Struktur und folgenden Populationsparametern:

$$y = 0{,}5 + 1{,}0\,\xi_1 + 0{,}5\,\xi_2 + 1{,}0\,\xi_1\xi_2 + \zeta$$

Mit den Stichprobendaten (N = 384) bringt die 2SLS-Analyse mit folgendem SPSS-Kommando

```
2SLS krit  WITH xr1 xm1 xr1xm1
  /INSTRUMENTS xr2 xm2 xr2xm2
  /CONSTANT .
```

sehr präzise Parameterschätzungen, z.B.:

```
Variable               B         SE B       Beta          T  Sig T

xr1             1,015821     ,101719    ,490845      9,987  ,0000
xm1              ,560396     ,206444    ,166390      2,715  ,0069
xr1xm1          1,109097     ,126934    ,657033      8,738  ,0000
(Constant)       ,391738     ,190094                 2,061  ,0400
```

Verwendet man pro Konstrukt *drei* Indikatoren, stehen drei zusätzliche Instrumentalvariablen zur Verfügung, und die Schätzergebnisse werden noch etwas besser:

```
Variable               B         SE B       Beta          T  Sig T

xr1             1,023591     ,097449    ,494599     10,504  ,0000
xm1              ,556230     ,189388    ,165153      2,937  ,0035
xr1xm1          1,060034     ,099645    ,627968     10,638  ,0000
(Constant)       ,397743     ,188101                 2,115  ,0351
```

Demgegenüber zeigen sich bei einer klassischen Interaktions-Regressionsanalyse unter Verwendung der Indikatoren x_1, x_3 und x_1x_3 wie erwartet stark geminderte Schätzungen (insbesondere beim Koeffizienten zum Produkt):

Koeffizienten[a]

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten B	Nicht standardisierte Koeffizienten Standardfehler	Standardisierte Koeffizienten Beta	T	Signifikanz
1	(Konstante)	,430	,181		2,375	,018
	xr1	,818	,084	,395	9,687	,000
	xm1	,505	,137	,150	3,682	,000
	xr1xm1	,754	,069	,446	10,954	,000

a. Abhängige Variable: krit

Die Determinationskoeffizienten liegen allerdings bei beiden Analysemethoden übereinstimmend deutlich unterhalb des wahren Wertes für das Strukturmodell (ca. 0,5):

```
Multiple R            ,60907
R Square              ,37096
Adjusted R Square     ,36599
Standard Error       3,64094
```

Modellzusammenfassung

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,608[a]	,370	,365	3,52568

a. Einflußvariablen : (Konstante), xr1xm1, xm1, xr1

6 Literatur

Anderson, T. W. (1984). *An introduction to multivariate statistical analysis.* New York: Wiley.

Arbuckle, J. L. & Wothke, W. (1999). *Amos 4.0 User's Guide.* Chicago, IL: SmallWaters Corporation.

Arbuckle, J. L. (2003). *Amos 5.0. Update to the Amos User's Guide.* Chicago, IL: SmallWaters Corporation.

Baltes-Götz, B. (1994). *Einführung in die Analyse von Strukturgleichungsmodellen mit LISREL 7 und PRELIS unter SPSS.* Online-Dokumentation: http://www.uni-trier.de/index.php?id=22734

Baltes-Götz, B. (2008). *Moderatoranalyse per multipler Regression mit SPSS*. Online-Dokument mit URL: http://www.uni-trier.de/index.php?id=22528

Baltes-Götz, B. (2008). *Analyse von Strukturgleichungsmodellen mit Amos 16.0*. Online-Dokument mit URL: http://www.uni-trier.de/index.php?id=22640

Bollen, K. A. & Paxton, P. (1998). Two-stage least squares estimation of interaction effects. In: R. E. Schumacker, & G. A. Marcoulides, (Eds.). *Interaction and nonlinear effects in structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bollen, K. A. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley.

Hayes, W. L. (1981). *Statistics*. New York: Holt, Rinehart &Winston.

Jaccard, J. & Wan, C. K. (1996). *LISREL approaches to interaction effects in multiple regression*. Thousend Oaks: Sage.

Jonsson, F. Y. (1998). Modeling Interaction and Nonlinear Effects: A Step-by-Step LISREL Example. In: R. E. Schumacker, & G. A. Marcoulides, (Eds.). *Interaction and nonlinear effects in structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jöreskog, K. G. (1998). Interaction and Nonlinear Modeling: Issues and approaches. In: R. E. Schumacker, & G. A. Marcoulides, (Eds.). *Interaction and nonlinear effects in structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jöreskog, K. G. & Yang, F. (1996). Nonlinear structural relation models: The Kenny-Judd model with interaction effects. In: G. A. Marcoulides & R. E. Schumacker (Eds.). *Advanced structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kenny, D. A. & Judd, C. M. (1984). Estimating the nonlinear and interaction effects of latent variables. *Psychological Bulletin*, 96(1), 201-210.

Rigdon, E. E., Schumacker, R. E. & Wothke, W. (1998). A comparative review of interaction and nonlinear modeling. In: R. E. Schumacker, & G. A. Marcoulides, (Eds.). *Interaction and nonlinear effects in structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schumacker, R. E. & Marcoulides, G. A. (1998). *Interaction and nonlinear effects in structural equation modeling.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.